



Análisis de sistemas lineales planares suaves a tramos

Restricciones en el espacio de estados

Ricardo Pinilla Estupiñán

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2018



Análisis de sistemas lineales planares suaves a tramos

Restricciones en el espacio de estados

Ricardo Pinilla Estupiñán

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2018

Análisis de sistemas lineales planares suaves a tramos

Restricciones en el espacio de estados

Ricardo Pinilla Estupiñán

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:
Ph.D. Gerard Olivar Tost

Línea de Investigación:
Sistemas Dinámicos
Grupo de Investigación:
ABC Dynamics

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2018

Dedicatoria

A mi familia.

Agradecimientos

Agradezco a mis profesores y compañeros de estudio por su enorme contribución en mi formación como investigador.

Este trabajo fue parcialmente financiado por Colciencias a través del proyecto "Modelado y simulación del Metabolismo Urbano de Bogota D.C. Codigo 111974558276.

Resumen

En este trabajo se estudian los sistemas con saturación, planteados en [1, 28], desde el marco teórico de los sistemas de Filippov, restringiéndolos al caso en que el sistema lineal que empuja contra la saturación presenta un centro en el origen. Para esto, se transformaron los sistemas con saturación en un sistema de Filippov, se calcularon los puntos de deslizamiento y se determinaron todas las formas posibles de los retratos de fase, con lo cual, se logró identificar los parámetros, curvas y diagramas de bifurcación que presenta el sistema de Filippov.

Palabras clave: Sistemas con saturación, Sistemas de Filippov, Centro en el origen, Bifurcación.

Abstract

In this work, we study systems of linear differential equations with saturations, proposed in [1, 28], from the theoretical framework of Filippov systems, restricting them to the case in which the linear system, which pushes against saturation, presents a center at the origin. With this aim, we transform systems with saturation in a Filippov one, we compute the special sliding points and we determine all the possible phase portraits. We identify the parameters, curves and bifurcation diagrams that the Filippov system shows.

Keywords: Systems with saturations, Filippov Systems, Center at the origin, Bifurcation.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
1 Introducción	2
1.1 Objetivos de la tesis	3
1.2 Metodología	4
2 Marco teórico	5
2.1 Estudio de la literatura de los sistemas de Filippov	5
2.1.1 Sistemas dos-dimensionales de Filippov	6
2.2 Sistemas con saturación	9
2.3 Dos teoremas de la geometría analítica	14
3 Descripción de los centros en el origen	15
4 De un sistema con saturación a un sistema de Filippov	29
4.1 Puntos deslizantes especiales	33
4.2 Retratos de fase del sistema de Filippov	42
5 Análisis de bifurcaciones	78
6 Resultados y trabajo a futuro	89
6.1 Resultados	89
6.2 Trabajo a futuro	90
Bibliografía	91

1 Introducción

Una gran cantidad de fenómenos naturales se rigen por leyes físicas. El querer interpretar y entender estos fenómenos utilizando aquellas leyes conlleva a la identificación de variables, las cuales se encuentran relacionadas entre si por medio de una o varias ecuaciones diferenciales que contienen derivadas ordinarias o parciales según sea el caso. La formulación de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales con el objeto de describir y entender una determinada situación física bajo ciertas condiciones es llamado un modelo matemático.

De acuerdo con lo anterior, resulta natural reconocer la importancia del estudio analítico, cualitativo y numérico aproximado de las ecuaciones diferenciales. La teoría en torno a este asunto, en un inicio, ha sido directamente inspirada por la mecánica, la astronomía y la física matemática. Su historia empezó en los siglos XVI y XVII cuando Johannes Kepler formula la leyes del movimiento planetario; luego, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz de forma independiente sentaron las bases del cálculo diferencial y junto a los Bernoulli resolvieron algunas ecuaciones diferenciales sencillas que se presentaron en problemas de geometría y mecánica [31], posteriormente Henri Poincaré da inicio al estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, comenzando de esta forma a sentar las bases de los sistemas dinámicos, el cual se estableció como un área propiamente dicha, gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como: Aleksandr Lyapunov, George D. Birkhoff, Balthasar van der Pol, Aleksandr Andronov, Stephen Smale entre otros [3]. En la actualidad se cuenta con amplias teorías matemáticas avanzadas para abordar ciertas clases de problemas desde diferentes puntos de vista, sin embargo, cada modelo matemático o sistema de ecuaciones diferenciales puede representar un reto hasta para el más experto en el tema.

La teoría de los sistemas dinámicos ha demostrado ser una herramienta importante para analizar el comportamiento de diferentes fenómenos físicos, biológicos y sociales (ver [9, 19, 30]). En la actualidad existe un extenso desarrollo acerca del enfoque de los sistemas dinámicos que se basan en la evolución de un sistema definido por una función suave de sus argumentos (ver [16, 18, 21, 29]); sin embargo, esta teoría excluye el estudio de fenómenos que se modelan por sistemas no suaves. Por ejemplo, circuitos eléctricos con suiches, modelos epidemiológicos, modelos biológicos y químicos (ver [4, 5, 11, 19, 23, 24, 32]).

Existen varias clasificaciones para los sistemas dinámicos no suaves, estas dependen del tipo de discontinuidad que presenta sus trayectorias y campos vectoriales [2, 23]. A continuación, se explica brevemente cada una de ellas.

- **Clase A. Sistemas con impactos**

Los sistemas con impactos se caracterizan por poseer una discontinuidad por saltos y trayectorias discontinuas debido a las superficies rígidas que tienen esta clase de sistemas [6, 7].

- **Clase B. Sistemas de Filippov**

Estos sistemas son descritos por un campo vectorial discontinuo. Presenta zonas de deslizamiento y de cruce [11, 12, 14, 15, 20, 22]. En la Sección 2.1 se dará una descripción con mayor profundidad.

- **Clase C. Sistemas suaves a tramos continuos**

En estos sistemas en comparación a los anteriores, el campo vectorial es continuo pero no diferenciable [10, 26, 27].

Una nueva clase es planteada en [1, 28], la cual es conocida como sistema con saturación. En estos se considera un sistema lineal dos-dimensional (planar) y una saturación, restricción, en el espacio de estados tal que la dinámica está prohibida en un lado de la saturación (región no admisible) y, en el otro lado (región admisible), la dinámica es descrita por un sistema lineal, asumen que puede existir una dinámica deslizante sobre la saturación siempre y cuando el sistema lineal, definido en la región admisible, empuje contra la saturación. En la Sección 2.2 se dará una descripción con mayor profundidad.

Como en [1] y [28] no existe una idea clara con respecto a la solución, conjuntos invariantes, equivalencia topológica y bifurcación de los sistemas con saturación, se hace necesario estudiarlo desde un marco matemático más desarrollado como lo son los sistemas de Filippov, es decir, se hace necesario transformar un sistema con saturación en un sistema de Filippov, donde el principal interés es analizar el comportamiento del sistema en la región admisible, especialmente sobre la saturación. Este trabajo se centra en dicha transformación cuando el sistema lineal que empuja contra la saturación presenta un centro en el origen. Además, se analiza el sistema Filippov calculado al determinar todos los posibles retratos de fase que presenta, lo cual permite establecer los parámetros y curvas de bifurcación que resultan de la interacción entre la frontera de conmutación y el sistema definido por debajo de esta al variar ciertos parámetros. Finalmente, se describen y se muestran los diagramas de bifurcación que presenta el sistema de Filippov.

1.1. Objetivos de la tesis

Se plantea como objetivo general desarrollar un método sistemático a través de la teoría de los sistemas de Filippov para el estudio de los sistemas con saturación, planteados en [1, 28],

restringiéndolos al caso en que el sistema lineal que empuja contra la saturación presenta un centro en el origen.

Los objetivos específicos son:

- (1) Realizar una descripción de los retratos de fase de los sistemas lineales dos dimensionales con centro en el origen según sus parámetros (entradas de la matriz de coeficientes).
- (2) Transformar los sistemas con saturación en un sistema de Filippov, restringiéndolos al caso en que el sistema lineal que empuja contra la saturación presenta un centro en el origen.
- (3) Determinar y clasificar los diferentes puntos deslizantes especiales del sistema de Filippov calculado.
- (4) Realizar un análisis de bifurcaciones de codimensión uno y dos del sistema de Filippov calculado.
- (5) Realizar implementaciones en MATLAB y MATCONT u otro lenguaje de cálculo con el fin de verificar los resultados teóricos obtenidos.

1.2. Metodología

Durante el desarrollo de la tesis se siguió el siguiente esquema:

- (i) **Proceso teórico:** Este proceso permitió darle una consolidación a los objetivos propuestos, basándose en aspectos fiables de tipo matemático que soportan los argumentos que se reflejen en el desarrollo y forma del cuerpo sistemático del problema. Con respecto a ellos se tomaron temas específicos dentro de la teoría de los sistemas dinámicos suaves a tramos cuyos referentes principales en este aspecto son [1], [8], [11], [12], [22] y [28].
- (ii) **Proceso analítico:** En este proceso se contrastó la teoría examinada, para ser interpretada y poderla utilizar óptimamente en el análisis del comportamiento de las soluciones del sistema, teniendo en cuenta como pautas el seguimiento de cada uno de los objetivos propuestos.
- (iii) **Proceso final:** En esta etapa, se discutió las ventajas y desventajas proporcionadas por este estudio. Además, se mostraron los resultados para verificar si se lograron a cabalidad los objetivos propuestos. Los resultados serán divulgados por medio de publicaciones de artículos en revistas indexadas.

2 Marco teórico

En esta sección se expone la teoría básica para cumplir con el propósito de esta tesis. Primero, se expone la teoría con respecto a los sistemas de Filippov, tomando como principales referencias los documentos [8], [11] y [22]. En segundo lugar, basándose en los documentos [1] y [28], se define los sistemas con saturación y se ilustra un ejemplo. Finalmente, se enuncian dos teoremas de la geometría analítica, los cuales son planteados y demostrados en el documento [25]; dichos teoremas se utilizaran para describir las trayectorias de los sistemas lineales dos dimensionales homogéneos con centro en el origen.

2.1. Estudio de la literatura de los sistemas de Filippov

Definición 1 ([8], Cap. 2). *Un sistema suave a tramos (SST) es descrito por un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\dot{X} = F_i(X), \quad X \in S_i \subset \mathbb{R}^n, \quad (2-1)$$

Donde los campos vectoriales F_i son suaves, definidos sobre regiones abiertas disjuntas S_i , y son suavemente extendibles a la clausura de S_i . Las regiones S_i son separadas por variedades $(n-1)$ -dimensionales, Σ_i , llamadas fronteras de conmutación. La unión entre las fronteras de conmutación Σ_i y las regiones S_i cubre el espacio de estados $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definición 2 ([22], Sec 1). *Se dice que un SST es continuo si $F_i(X) = F_j(X)$ en cualquier punto X de la frontera Σ_{ij} separando dos regiones adyacentes S_i y S_j . En caso contrario, se dice que el sistema es discontinuo.*

Si el SST es continuo, el vector \dot{X} es definido de manera única en cualquier punto del espacio de estados y las trayectorias en la región S_i se aproximan transversalmente a la frontera Σ_{ij} , la cruza y continua dentro de la región adyacente S_j [22].

Definición 3 ([22], Sec 1). *Se dice que un SST es de Filippov si este es discontinuo.*

Si X es un punto de discontinuidad en un sistema de Filippov y las componentes transversales de $F_i(X)$ y $F_j(X)$ en la frontera Σ_{ij} tienen el mismo signo, la trayectoria cruza la frontera. En el caso contrario, si las componentes transversales de $F_i(X)$ y $F_j(X)$ en la frontera Σ_{ij}

tienen signo opuesto, el estado del sistema es forzado a permanecer sobre la frontera Σ_{ij} y a *deslizarse* sobre ella [22]. Para definir el movimiento sobre la frontera se utiliza el método convexo de Filippov [14, 20], que define los movimientos deslizantes sobre Σ_{ij} como las soluciones de $\dot{X} = F_S(X)$ sobre Σ_{ij} , donde $F_S(X)$ es una combinación convexa de $F_i(X)$ y $F_j(X)$ tangente a Σ_{ij} en X . Por tanto, en el caso en que se presente deslizamiento el retrato de fase del sistema estaría compuesto por el retrato en la frontera Σ y los retratos de cada región S_i .

2.1.1. Sistemas dos-dimensionales de Filippov

Debido a que los cálculos en esta tesis se desarrollan en \mathbb{R}^2 , se consideran sistemas generales dos-dimensionales de Filippov y se asume, por simplicidad, que sólo se tiene dos regiones S_1 y S_2 y una frontera Σ , luego el SST es de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in S_1, \\ F_2(x, y), & (x, y) \in S_2. \end{cases} \quad (2-2)$$

La frontera Σ y las regiones S_1 y S_2 se definen por medio de una función $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, conocida como función evento [13], de la siguiente forma:

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}, \quad S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) < 0\}, \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) > 0\}.$$

Se asume que $H \in C^k$, $k \geq 2$, y $\nabla H(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. La frontera Σ puede ser cerrada o se extiende de manera infinita en ambas direcciones.

Las soluciones de (2-2) pueden ser construidas por concatenación de las soluciones en $S_{1,2}$ y las soluciones deslizantes sobre Σ , donde dichas soluciones deslizantes son obtenidas utilizando el método convexo de Filippov [14, 20].

Sea

$$\sigma(x, y) = \langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle \langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) \rangle, \quad (2-3)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar. A continuación, se define el conjunto cruce y el conjunto deslizante.

Definición 4 ([22], Sec. 2). *Se define el conjunto cruce Σ_c y el conjunto deslizante Σ_S de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} \Sigma_c &:= \{(x, y) \in \Sigma \mid \sigma(x, y) > 0\}, \\ \Sigma_S &:= \{(x, y) \in \Sigma \mid \sigma(x, y) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Por definición, se tiene que Σ_c es el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in \Sigma$, donde los vectores $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ tienen componentes transversales diferentes de cero y del mismo signo;

por tanto, las trayectorias que inician en S_i y llegan a Σ_c se concatenan con trayectorias en S_j , donde $i, j = 1, 2$ y $j \neq i$.

Por otro lado, Σ_S es el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in \Sigma$ donde los vectores $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ pueden ser tangentes a Σ , iguales a cero o con componentes transversales de signo opuesto, luego, en estos puntos, la trayectoria de (2-2) es forzada a permanecer en Σ y a deslizarse sobre ella, dicho movimiento deslizante puede ser definido por el método convexo de Filippov.

Definición 5 ([11], Sec 2). *Los puntos $(x, y) \in \Sigma_S$, donde*

$$\langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) - F_1(x, y) \rangle = 0$$

*se denominan **puntos deslizantes singulares**.*

Si $(x, y) \in \Sigma_S$ es un punto deslizante singular, por definición, se debe cumplir una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

- (i) los vectores $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ son tangentes a Σ ,
- (ii) $F_1(x, y) = 0$ y $F_2(x, y)$ es tangente a Σ ,
- (iii) $F_2(x, y) = 0$ y $F_1(x, y)$ es tangente a Σ ,
- (iv) $F_1(x, y) = 0$ y $F_2(x, y) = 0$.

El método de Filippov asocia la siguiente combinación convexa $F_S(x, y)$ de los vectores $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ a cada punto deslizante no singular $(x, y) \in \Sigma_S$:

$$F_S(x, y) = \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y), \quad (2-4)$$

donde

$$\lambda = \frac{\langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) \rangle}{\langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) - F_1(x, y) \rangle} \quad (2-5)$$

Además, F_S y sus derivadas pueden ser definidas por continuidad en todos los puntos deslizantes singulares no aislados. En puntos deslizantes no aislados, $(x, y) \in \Sigma_S$, se tiene

$$\langle \nabla H(x, y), F_S(x, y) \rangle = 0,$$

es decir, $F_S(x, y)$ es tangente al segmento deslizante Σ_S . Se considera $F_S(x, y) = 0$ en puntos deslizantes singulares aislados.

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_S(x, y) = \begin{pmatrix} F_{S1}(x, y) \\ F_{S2}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2-6)$$

define una ecuación diferencial escalar sobre Σ_S , la cual es suave en intervalos de deslizamiento de una dimensión de Σ_S [22]. Soluciones de la ecuación (2-6) son llamadas *soluciones deslizantes*.

Definición 6 ([12], Sec. 2). Dos vectores V_1 y V_2 se dicen que son **anti-colineales** si existen dos números reales λ_1 y λ_2 con $\lambda_1\lambda_2 > 0$ tal que

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0.$$

A continuación, se definen los diferentes **puntos deslizantes especiales**.

Definición 7 ([22], Sec 2). Un punto $(x, y) \in \Sigma_S$ se dice que es

(i) un **pseudo-equilibrio** si $F_S(x, y) = 0$ y $F_{1,2}(x, y) \neq 0$. En estos puntos, por (2-4), se tiene que los vectores $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ son anti-colineales.

(ii) un **equilibrio de frontera** si

$$F_1(x, y) = 0 \quad \vee \quad F_2(x, y) = 0.$$

Note que si $(x, y) \in \Sigma_S$ es un equilibrio de frontera y no es un punto deslizante singular, por (2-4) y (2-5) se tiene que $F_S(x, y) = 0$.

(iii) un **punto tangente** si $F_1(x, y) \neq 0$, $F_2(x, y) \neq 0$ y

$$\langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle = 0 \quad \vee \quad \langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) \rangle = 0.$$

Sea $T \in \Sigma_S$ un punto tangente con respecto a F_1 , se dice que es un punto tangente visible (invisible), si la trayectoria de $(\dot{x} \ \dot{y})^T = F_1(x, y)$ comenzando en T pertenece a $S_1(S_2)$ para todo $|t| \neq 0$ lo suficientemente pequeño. Una definición similar se tiene para el campo vectorial F_2 .

Definición 8 ([22], Sec. 2.3). Dos sistemas de Filippov son llamados **topológicamente equivalentes** si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

(i) mapea la frontera de discontinuidad de un sistema sobre la frontera de discontinuidad del otro sistema.

(ii) Segmentos de cruce y deslizantes de cualquier trayectoria son mapeados sobre los correspondientes segmentos de su imagen.

(iii) trayectorias de un sistema son mapeadas sobre las correspondientes trayectorias del otro sistema preservando la orientación en el tiempo.

Definición 9 ([8], Sec. 4). Una **bifurcación** se produce por una pequeña perturbación del sistema lo cual produce un sistema no topológicamente equivalente al inicial, además, se dice que dicha bifurcación es **inducida por la discontinuidad** si afecta el retrato de fase en más de una región.

2.2. Sistemas con saturación

Los sistemas con saturación son planteados en los documentos [1] y [28], en estos asumen un sistema lineal dos-dimensional,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_1(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \quad (2-7)$$

y una saturación, Σ , en el espacio de estados tal que la dinámica está prohibida en un lado de la saturación (región no admisible) y, en el otro lado (región admisible), las dinámicas son descritas por el sistema lineal (2-7).

Asumen que la saturación es definida sólo en la segunda componente del vector de estados por la recta

$$y = h,$$

donde h es un parámetro, luego la región admisible viene dada por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \leq h\},$$

mientras que la región no admisible viene dada por

$$\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y > h\}.$$

Además, asumen que puede existir una dinámica deslizante sobre la saturación, $y = h$, siempre y cuando el campo F_1 en (2-7) empuje contra la saturación. Suponen que el sistema entra y se desliza sobre la saturación siempre que y sea igual a h y

$$cx + dh \geq 0.$$

La dinámica deslizante sobre la saturación viene dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_S(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2-8)$$

De lo planteado arriba, se obtiene el siguiente sistema a tramos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ F_S(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2-9)$$

donde los campos F_1 y F_2 están dados por (2-7) y (2-8), respectivamente, y

$$\begin{aligned} \Omega_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h \wedge cx + dh \geq 0\}, \\ \Omega_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq h \wedge x \in \mathbb{R}\} \cap \Omega_2^c. \end{aligned}$$

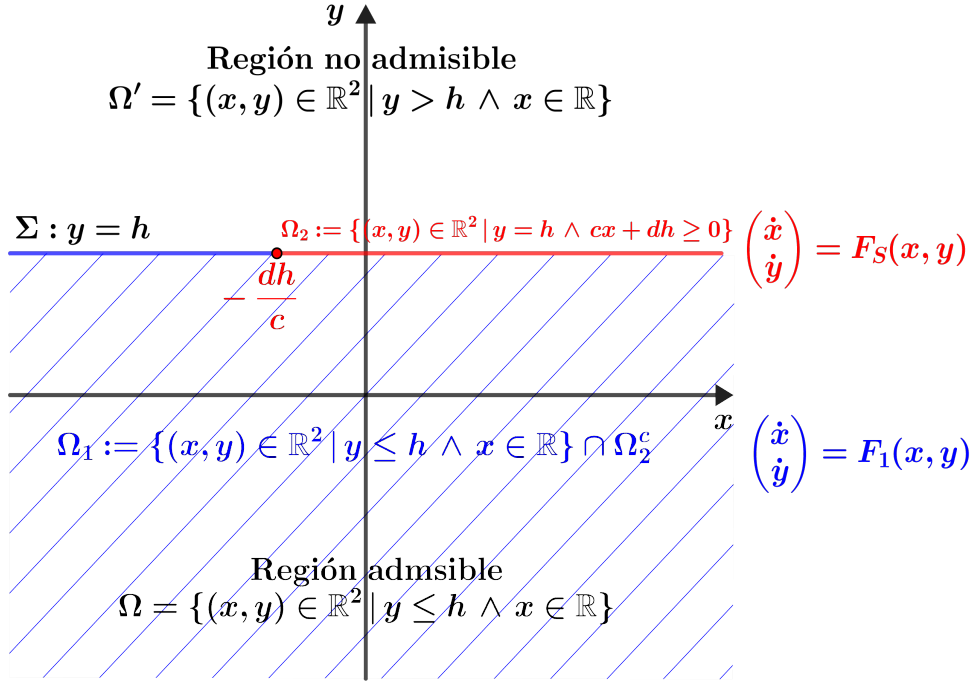


Figura 2-1: Sistema con saturación (2-9), donde a , c , d y h mayores a cero y b cualquier número real, la saturación viene dada por la recta $y = h$, el sistema $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_1(x, y)$ definido en Ω_1 se presenta en azul, el sistema $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_S(x, y)$ definido en Ω_2 se presenta en rojo y las regiones admisible y no admisible se definen por Ω y Ω' , respectivamente.

El sistema (2-9) se denomina **sistema con saturación**, el cual se representa en la Figura 2-1.

Los sistemas lineales dos-dimensionales con saturaciones se pueden utilizar para modelar el comportamiento de circuitos oscilatorios, los cuales son utilizados en sistemas mecánicos como brazos roboticos o sistemas de posición neumática [1, 28].

En el siguiente ejemplo se ilustra un caso particular de un de sistema con saturación.

Ejemplo 1. Considere el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_1(x, y) = \begin{pmatrix} -by \\ bx \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

con $b > 0$ y la saturación dada por

$$y = h,$$

con $h > 0$, luego la región admisible viene dada por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \leq h\}$$

y la región no admisible por

$$\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y > h\}.$$

El sistema en la saturación viene dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_S(x, y) = \begin{pmatrix} -by \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

para todo x, y tal que $y = h$ y $x \geq 0$.

De lo anterior se tiene el siguiente sistema con saturación, el cual se ilustra en la Figura 2-2

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ F_S(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2-12)$$

donde los campos F_1 y F_S están dados por (2-10) y (2-11), respectivamente, y

$$\begin{aligned} \Omega_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h \wedge x \geq 0\}, \\ \Omega_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq h \wedge x \in \mathbb{R}\} \cap \Omega_2^c. \end{aligned}$$

La solución del sistema (2-10) con condición inicial $(x_0, y_0) \in \Omega_1$ viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(bt) - y_0 \sin(bt), \\ y(t) &= x_0 \sin(bt) + y_0 \cos(bt). \end{aligned} \quad (2-13)$$

Manipulando (2-13) algebraicamente se obtiene la siguiente ecuación

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

la cual representa una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

La solución general para el sistema (2-11) viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= -bk_1t + k_2, \\ y(t) &= k_1, \end{aligned} \quad (2-14)$$

donde k_1, k_2 son constantes. Por tanto, las trayectorias del sistema (2-11) son líneas rectas horizontales.

Se consideran los siguientes casos para la condición inicial (x_0, y_0) en Ω_1 :

$$(i) \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < h.$$

En este caso, la trayectoria del sistema (2-10) comenzando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de circunferencia y no corta la saturación, $y = h$, ya que la circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es menor que h .

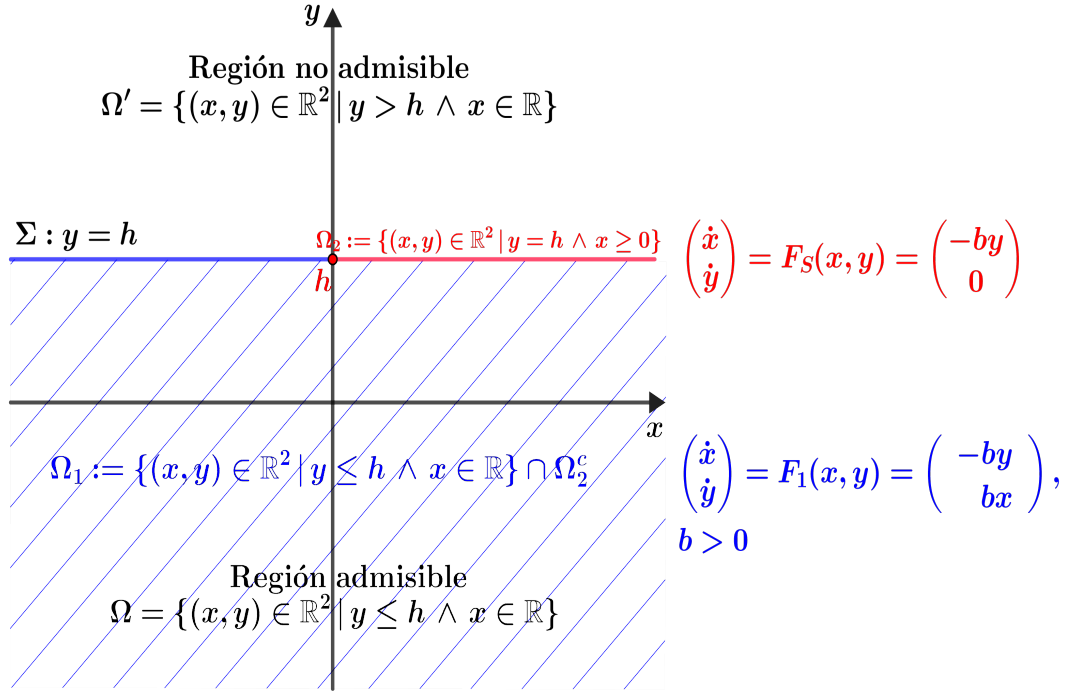


Figura 2-2: Sistema con saturación (2-12), donde b y h son mayores a cero, la saturación viene dada por la recta $y = h$, el sistema $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_1(x, y)$ definido en Ω_1 se presenta en azul, el sistema $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_S(x, y)$ definido en Ω_2 se presenta en rojo y las regiones admisible y no admisible se definen por Ω y Ω' , respectivamente.

(ii) $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} > h$.

En este caso, la trayectoria del (2-10) comenzando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de circunferencia hasta que corta la saturación en el punto

$$\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - h^2}, h \right),$$

el cual está a la derecha del punto $(0, h)$.

Se supone que la trayectoria corta la saturación cuando $t = t_0$.

Como la primera coordenada del punto de corte es mayor a cero y la segunda coordenada es igual a h , se tiene que la trayectoria es forzada a permanecer en la saturación y a deslizarse sobre ella, dicho movimiento deslizante es definido por el sistema (2-11).

La solución del sistema (2-11) con condición inicial $(x(t_0), y(t_0))$ viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= bh(t_0 - t) + \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - h^2}, \\ y(t) &= h. \end{aligned} \tag{2-15}$$

El valor de t en que $x(t) = 0$ viene dado por

$$t_1 = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - h^2}}{bh} + t_0 > 0$$

Como $x(t)$ es decreciente y continua en $[t_0, t_1]$, se tiene que la trayectoria se desliza sobre la saturación, hacia la izquierda, hasta llegar al punto $(0, h)$ cuando $t = t_1 = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - h^2}}{bh} + t_0$; luego, la trayectoria sale de la saturación y continua evolucionando en Ω_1 en forma de circunferencia formándose un ciclo.

En la Figura 2-3, se ilustra el retrato de fase del sistema con saturación (2-12).

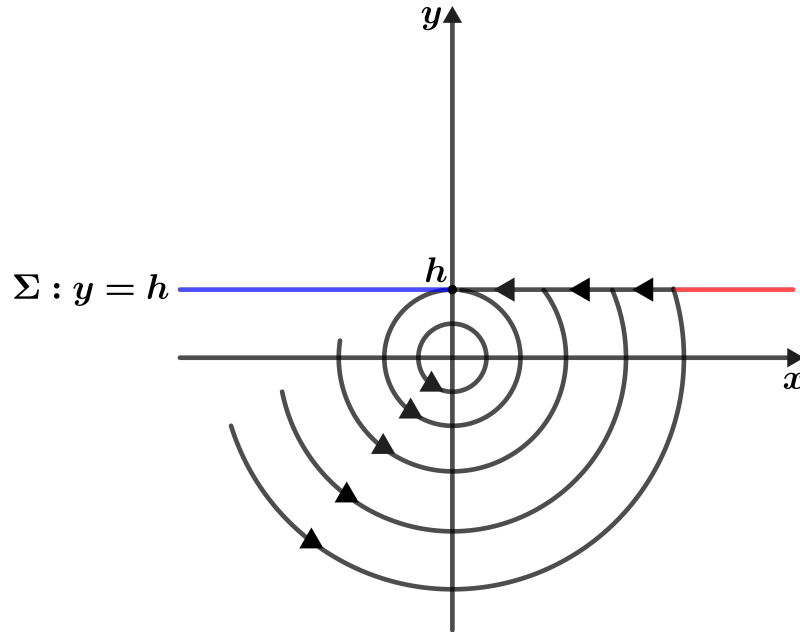


Figura 2-3: Retrato de fase del sistema con saturación (2-12). La saturación está dada por la recta $y = h$, las regiones admisible y no admisible están dadas por $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R} \wedge y \leq h\}$ y $\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R} \wedge y > h\}$, respectivamente. Las trayectorias del sistema (2-10) definido en $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq h \wedge x \in \mathbb{R}\} \cap \Omega_2^c$, evolucionan en forma de circunferencia en sentido levógiro, mientras que las trayectorias del sistema (2-11) definido en $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = h \wedge x \geq 0\}$ son líneas rectas horizontales. Si una trayectoria del sistema (2-10) definido en Ω_1 corta a la saturación $y = h$, esta es forzada a permanecer sobre la saturación y a deslizarse sobre ella hasta llegar al punto $(0, h)$, dicha dinámica deslizante es definida por el sistema (2-11), luego, la trayectoria entra de nuevo a la región Ω_1 y continua evolucionando en forma de circunferencia.

Dado que los sistemas planteados anteriormente, sistemas con saturación, no se encuentran dentro de un marco teórico matemático, no podemos realizar un análisis acerca de la esta-

bilidad de los puntos de equilibrio y de las posibles bifurcaciones que se pueden presentar. Con el fin de solucionar esto, se pretende estudiar dichos sistemas desde el marco teórico de los sistemas Filippov, de tal manera que el sistema lineal $(\dot{x} \ \dot{y})^T = F_1(x, y)$ tenga un centro en el origen y la frontera de conmutación, Σ , coincida con la saturación $y = h$. Para esto se calcula un campo, F_2 , definido en clausura de la región no admisible, de tal manera que sobre la saturación (frontera de conmutación) se presente deslizamiento o cruce de las trayectorias. Cabe resaltar que el principal interés de esta tesis es analizar el comportamiento de los sistemas con saturación dentro de la región admisible, especialmente sobre la saturación, desde el marco teórico de los sistemas de Filippov.

2.3. Dos teoremas de la geometría analítica

Los siguientes teoremas se utilizarán para describir las trayectorias de los sistemas lineales dos-dimensionales que presentan un centro en el origen.

Teorema 1 ([25], Cap. 9). *La ecuación general de segundo grado,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

representa una cónica del género parábola, elipse o hipérbola, según el indicador, $I = B^2 - 4AC$, sea cero, negativo o positivo, respectivamente.

Teorema 2 ([25], Cap. 9). *La ecuación general de segundo grado*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $B \neq 0$, puede transformarse siempre en otra de la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

sin término en $x'y'$, haciendo girar los ejes coordenados un ángulo agudo positivo θ tal que

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}, \quad \text{si } A \neq C,$$

y

$$\theta = \pi/4, \quad \text{si } A = C.$$

3 Descripción de los centros en el origen

En esta sección se presenta un teorema que tiene por objetivo describir las trayectorias de los sistemas lineales dos dimensionales homogéneos que presentan un centro en el origen. Este teorema se utilizará para describir las trayectorias del sistema de Filippov que se calculará en la Sección 4.

Se considera el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

tal que

$$a + d = 0, \quad (3-2)$$

$$a^2 + bc < 0. \quad (3-3)$$

El sistema (3-1) satisfaciendo las condiciones (3-2) y (3-3) presenta un centro en el origen (ver [29]). Por tanto, sus trayectorias son circunferencias o elipses.

Observación 1. *De la desigualdad (3-3) se tiene que b y c son diferentes de cero y de signo opuesto.*

El siguiente teorema describe las trayectorias de un sistema lineal dos-dimensional que presenta un centro en el origen.

Teorema 3 (Descripción centros en el origen). *Las trayectorias del sistema (3-1) con condición inicial $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ y satisfaciendo las condiciones (3-2) y (3-3) son:*

(1) *Circunferencias con centro en el origen si*

$$(i) \ a = 0,$$

$$(ii) \ \frac{c}{b} = -1.$$

Las ecuaciones de las circunferencias vienen dadas por

$$x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2.$$

(2) *Elipses con centro en el origen, cuyos ejes mayor y menor están sobre los ejes coordenados si*

- (i) $a = 0$,
- (ii) $\frac{c}{b} \neq -1$.

Las ecuaciones de las elipses vienen dadas por

$$\frac{x^2(t)}{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2} + \frac{y^2(t)}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} = 1.$$

Además, si

- $\frac{c}{b} > -1$, las elipses tienen su eje mayor sobre el eje x .
 - $\frac{c}{b} < -1$, las elipses tienen su eje mayor sobre el eje y .
- (3) Elipses con centro en el origen, cuyos ejes mayor y menor están rotados un ángulo positivo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ si

- (i) $a \neq 0$,
- (ii) $\frac{c}{b} \neq -1$,
- (iv) $\frac{a}{b+c} < 0$.

Las ecuaciones de las elipses en el plano xy vienen dadas por

$$-\frac{c}{b}x^2(t) + 2\frac{a}{b}x(t)y(t) + y^2(t) + \frac{x_0[cx_0 - 2ay_0] - by_0^2}{b} = 0.$$

Las ecuaciones de las elipses en el plano rotado $x'y'$ vienen dadas por

$$\frac{(x')^2}{\lambda} + \frac{(y')^2}{\beta} = 1,$$

donde

$$\lambda = \frac{2\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2)}{\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(b-c) + 4a|a| - (c+b)|c+b|},$$

$$\beta = \frac{2\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2)}{\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(b-c) - 4a|a| + (c+b)|c+b|}.$$

- (4) Elipses con centro en el origen, cuyos ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$ si

- (i) $a \neq 0$,
- (ii) $\frac{c}{b} \neq -1$,
- (iii) $\frac{a}{c+b} > 0$.

Las ecuaciones de las elipses en el plano xy vienen dadas por

$$-\frac{c}{b}x^2(t) + 2\frac{a}{b}x(t)y(t) + y^2(t) + \frac{x_0[cx_0 - 2ay_0] - by_0^2}{b} = 0.$$

Las ecuaciones de las elipses en el plano rotado $x'y'$ vienen dadas por

$$\frac{(x')^2}{\tilde{\lambda}} + \frac{(y')^2}{\tilde{\beta}} = 1,$$

donde

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2)}{\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(b-c) + 4a|a| + (c+b)|c+b|},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{2\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2)}{\sqrt{4a^2 + (c+b)^2}(b-c) - 4a|a| + (c+b)|c+b|}.$$

(5) Elipses con centro en el origen, cuyos ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$ si

(i) $a \neq 0$,

(ii) $\frac{c}{b} = -1$.

Las ecuaciones de las elipses en el plano xy vienen dadas por

$$x^2(t) + 2\frac{a}{b}x(t)y(t) + y^2(t) + \frac{x_0[cx_0 - 2ay_0] - by_0^2}{b} = 0.$$

Las ecuaciones de las elipses en el plano rotado $x'y'$ vienen dadas por

$$\frac{(x')^2}{\frac{x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2}{b+a}} + \frac{(y')^2}{\frac{x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2}{b-a}} = 1.$$

Además, en cualquiera de los casos (1), (2), (3), (4) y (5) si

- $b > 0$, las trayectorias del sistema (3-1) giran en sentido dextrógiro,
- $b < 0$, las trayectorias del sistema (3-1) giran en sentido levógiro.

Por otro lado, en cualquiera de los casos (3), (4) y (5) si

- $\frac{a}{b} > 0$, el eje mayor de la elipse está sobre el eje rotado y' ,
- $\frac{a}{b} < 0$, el eje mayor de la elipse está sobre el eje rotado x' .

Demostración. De [29] se tiene que la solución del sistema (3-1) con condición inicial (x_0, y_0) y bajo las condiciones (3-2) y (3-3) viene dada por

$$x(t) = x_0 \left[\frac{a}{\gamma} \sin(t\gamma) + \cos(t\gamma) \right] + \frac{by_0}{\gamma} \sin(t\gamma), \quad (3-4)$$

$$y(t) = \frac{cx_0}{\gamma} \sin(t\gamma) + y_0 \left[\cos(t\gamma) - \frac{a}{\gamma} \sin(t\gamma) \right], \quad (3-5)$$

donde

$$\gamma = \sqrt{-a^2 - bc}. \quad (3-6)$$

En primer lugar, se prueba que la solución de (3-1), dada por (3-4) y (3-5), satisface la ecuación de una elipse, para esto se calcula la matriz P que diagonaliza a la matriz de coeficientes A . La matriz P y su inversa, P^{-1} , están dadas por

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\gamma}{b} & -\frac{a}{b} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\gamma} & \frac{b}{\gamma} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bajo la transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3-7)$$

se obtiene el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

cuya solución general, según [29], viene dada por

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}_0 \cos(t\gamma) - \hat{y}_0 \sin(t\gamma), \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}_0 \sin(t\gamma) + \hat{y}_0 \cos(t\gamma). \end{aligned} \quad (3-8)$$

Manipulando (3-8) algebraicamente se obtiene

$$\hat{x}^2(t) = \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 - \hat{y}^2(t). \quad (3-9)$$

De (3-7) se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{y}(t), \\ y(t) &= \frac{\gamma}{b} \hat{x}(t) - \frac{a}{b} \hat{y}(t). \end{aligned} \quad (3-10)$$

De (3-9) y (3-10) se obtiene la siguiente ecuación

$$-\frac{c}{b} x^2(t) + 2\frac{a}{b} x(t)y(t) + y^2(t) - \frac{\gamma^2}{b^2} (\hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2) = 0. \quad (3-11)$$

Si $A = -\frac{c}{b}$, $B = 2\frac{a}{b}$ y $C = 1$, se tiene

$$I = B^2 - 4AC = -\frac{4\gamma^2}{b^2} < 0,$$

ya que por (3-3) y (3-6) $\gamma^2 = -a^2 - bc > 0$, por tanto, por el Teorema 1, la ecuación (3-11) representa una elipse.

Se consideran los siguientes casos con respecto a los valores que puede tomar a y $\frac{c}{b}$:

1. $a = 0$ y $\frac{c}{b} \neq -1$,
2. $a = 0$ y $\frac{c}{b} = -1$,
3. $a \neq 0$ y $\frac{c}{b} \neq -1$,
4. $a \neq 0$ y $\frac{c}{b} = -1$.

A continuación, se analizan los casos del 1 al 4.

1. $a = 0$ y $\frac{c}{b} \neq -1$.

Si $a = 0$ y $\frac{c}{b} \neq -1$, por (3-10) y (3-11) se tiene la siguiente ecuación

$$-\frac{c}{b}x^2(t) + y^2(t) - y_0^2 + \frac{c}{b}x_0^2 = 0. \quad (3-12)$$

Manipulando (3-12) algebraicamente se obtiene

$$\frac{x^2(t)}{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2} + \frac{y^2(t)}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} = 1. \quad (3-13)$$

Como $\frac{c}{b} < 0$ y $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, se tiene que $x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2 > 0$ y $y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2 > 0$, por tanto, (3-13) se trata de la ecuación de una elipse con centro en el origen, donde sus ejes mayor y menor están sobre los ejes coordenados x y y .

A continuación, se determina la posición del eje mayor de la elipse (3-13) en el plano xy .

Como $\frac{c}{b} \neq -1$, se tiene que $\frac{c}{b} > -1$ ó $\frac{c}{b} < -1$. A continuación, se analiza cada uno de estos casos.

- 1.1 $\frac{c}{b} > -1$.

Si se multiplica ambos miembros de la desigualdad $\frac{c}{b} > -1$ por $\frac{b}{c}$, se obtiene $1 < -\frac{b}{c}$, luego

$$y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2 < -\frac{b}{c}y_0^2 + x_0^2.$$

Por tanto, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje x .

- 1.2 $\frac{c}{b} < -1$.

De forma análoga al caso (i), se tiene que el eje mayor de la elipse está sobre el eje y .

2. $a = 0$ y $\frac{c}{b} = -1$.

Si $a = 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, por (3-10) y (3-11) se tiene la siguiente ecuación

$$x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2. \quad (3-14)$$

La ecuación (3-14) representa una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

3. $a \neq 0$ y $\frac{c}{b} \neq -1$.

Si $a \neq 0$ y $\frac{c}{b} \neq -1$, por (3-10) y (3-11) se obtiene la siguiente ecuación

$$-\frac{c}{b}x^2(t) + 2\frac{a}{b}x(t)y(t) + y^2(t) = \frac{\xi}{b}, \quad (3-15)$$

donde

$$\xi = x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2. \quad (3-16)$$

Como se comprobó anteriormente, la ecuación (3-15) representa una elipse en el plano xy . Como $A \neq C$, por el Teorema 2, se suprime el término xy girando los ejes coordenados x y y un ángulo agudo positivo θ , diferente de $\pi/4$, tal que

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} = -\frac{2a}{c + b}. \quad (3-17)$$

Como el ángulo θ es tal que $0 < \theta < \pi/4$ ó $\pi/4 < \theta < \pi/2$, se tiene que $0 < 2\theta < \pi/2$ ó $\pi/2 < 2\theta < \pi$, por tanto, $\operatorname{tg}(2\theta) = -\frac{2a}{c+b}$ debe ser positiva o negativa.

A continuación se calculan las ecuaciones de la elipse (3-15) que resultan de suprimir el terminino xy al girar los ejes coordenados x y y un ángulo agudo positivo θ diferente de $\pi/4$.

Como $a \neq 0$ y $\frac{c}{b} \neq -1$, se tiene que $\frac{a}{c+b} \neq 0$, luego $\frac{a}{c+b} < 0$ ó $\frac{a}{c+b} > 0$. A continuación, se analiza cada uno de estos casos.

3.1 $\frac{a}{c+b} < 0$.

Si $\frac{a}{c+b} < 0$, por (3-17) se tiene que $\operatorname{tg}(2\theta) > 0$, por tanto, al ser θ un ángulo agudo diferente de $\pi/4$ se sigue que $0 < \theta < \pi/4$, luego

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sec(2\theta)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(2\theta) + 1}} = \frac{|c + b|}{\mu},$$

donde

$$\mu = \sqrt{4a^2 + (c + b)^2} \quad (3-18)$$

Del valor de $\cos(2\theta)$ se obtienen los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ por medio de las formulas trigonométricas del ángulo mitad.

$$\sin(\theta) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\mu - |c + b|}{2\mu}} \quad (3-19)$$

$$\cos(\theta) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\mu + |c + b|}{2\mu}} \quad (3-20)$$

Como $0 < \theta < \pi/4$, se tiene que $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ son mayores que cero, luego de (3-19) y (3-20) se obtiene:

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{\mu - |c + b|}{2\mu}}, \quad (3-21)$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{\mu + |c + b|}{2\mu}}. \quad (3-22)$$

Por tanto, las ecuaciones de transformación por rotación vienen dadas por:

$$x = x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) = x' \delta - y' \phi, \quad (3-23)$$

$$y = x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) = x' \phi + y' \delta, \quad (3-24)$$

donde

$$\phi = \sin(\theta) = \sqrt{\frac{\mu - |c + b|}{2\mu}}, \quad (3-25)$$

$$\delta = \cos(\theta) = \sqrt{\frac{\mu + |c + b|}{2\mu}}. \quad (3-26)$$

Sustituyendo (3-23) y (3-24) en la ecuación (3-15) se obtiene

$$-\frac{c}{b}(x'\delta - y'\phi)^2 + \frac{2a}{b}(x'\delta - y'\phi)(x'\phi + y'\delta) + (x'\phi + y'\delta)^2 = \frac{\xi}{b}. \quad (3-27)$$

Manipulando algebraicamente (3-27) se obtiene

$$\begin{aligned} (x')^2 \left(-\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2 \right) + (y')^2 \left(-\frac{c}{b}\phi^2 - 2\frac{a}{b}\delta\phi + \delta^2 \right) + 2\frac{cx'y'\delta\phi}{b} \\ + 2\frac{a}{b}(x'y'\delta^2 - x'y'\phi^2) + 2x'y'\delta\phi = \frac{\xi}{b}, \end{aligned} \quad (3-28)$$

donde

$$2\frac{cx'y'\delta\phi}{b} + 2\frac{a}{b}(x'y'\delta^2 - x'y'\phi^2) + 2x'y'\delta\phi = 2x'y' \frac{|a|(c+b) + a|c+b|}{b\mu}. \quad (3-29)$$

Como $\frac{a}{c+b} < 0$, se sigue que a y $c+b$ son diferentes de cero y de signo opuesto, luego $|a|(c+b) + a|c+b| = 0$, por tanto, de (3-29) se tiene

$$2\frac{cx'y'\delta\phi}{b} + 2\frac{a}{b}(x'y'\delta^2 - x'y'\phi^2) + 2x'y'\delta\phi = 0, \quad (3-30)$$

luego de (3-28) y (3-30) se obtiene la siguiente ecuación

$$(x')^2 \left(-\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2 \right) + (y')^2 \left(-\frac{c}{b}\phi^2 - 2\frac{a}{b}\delta\phi + \delta^2 \right) = \frac{\xi}{b}, \quad (3-31)$$

donde

$$-\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2 > 0, \quad (3-32)$$

$$-\frac{c}{b}\phi^2 - 2\frac{a}{b}\delta\phi + \delta^2 > 0, \quad (3-33)$$

$$\frac{\xi}{b} > 0. \quad (3-34)$$

En efecto, manipulando algebraicamente la expresión $-\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2$ se obtiene lo siguiente

$$-\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2 = \left(\frac{a}{b}\delta + \phi \right)^2 + \frac{\delta^2\gamma^2}{b^2}. \quad (3-35)$$

Como $a \neq 0$ y $c+b \neq 0$, de (3-25) y (3-26) se tiene que $\delta > 0$ y $\phi > 0$, además, de (3-3) se sigue que $\gamma^2 = -a^2 - bc > 0$, por tanto, de (3-35) se obtiene la siguiente desigualdad

$$-\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2 > 0.$$

De forma análoga se prueba que $-\frac{c}{b}\phi^2 - 2\frac{a}{b}\delta\phi + \delta^2 > 0$.

Por otro lado, por (3-16) y de las ecuaciones en (3-10) se tiene lo siguiente:

$$\frac{\xi}{b} = \frac{x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2}{b} = \frac{\gamma^2}{b^2}(\hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2), \quad (3-36)$$

$$\hat{x}_0 = \frac{ax_0 + by_0}{\gamma}, \quad (3-37)$$

$$\hat{y}_0 = x_0. \quad (3-38)$$

Como $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, de (3-37) y (3-38) se sigue que $(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \neq (0, 0)$, por tanto, por (3-3) y (3-36) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{\xi}{b} > 0.$$

Las desigualdades (3-32), (3-33) y (3-34) permiten manipular (3-31) con el fin de obtener la siguiente ecuación

$$\frac{(x')^2}{\xi \left(b \left(-\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2 \right) \right)^{-1}} + \frac{(y')^2}{\xi \left(b \left(-\frac{c}{b}\phi^2 - 2\frac{a}{b}\delta\phi + \delta^2 \right) \right)^{-1}} = 1. \quad (3-39)$$

Como

$$\begin{aligned} -\frac{c}{b}\delta^2 + 2\frac{a}{b}\delta\phi + \phi^2 &= \frac{(b-c)\mu + 4a|a| - (c+b)|c+b|}{2b\mu}, \\ -\frac{c}{b}\phi^2 - 2\frac{a}{b}\delta\phi + \delta^2 &= \frac{(b-c)\mu - 4a|a| + (c+b)|c+b|}{2b\mu}, \end{aligned}$$

de (3-39) se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{(x')^2}{2\mu\xi(\mu(b-c) + 4a|a| - (c+b)|c+b|)^{-1}} + \frac{(y')^2}{2\mu\xi(\mu(b-c) - 4a|a| + (c+b)|c+b|)^{-1}} = 1. \quad (3-40)$$

La ecuación (3-40) representa a la elipse (3-15) en el plano rotado $x'y'$, donde los ejes x' y y' están rotados con respecto a los ejes x y y un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$.

A continuación, se determina la posición del eje mayor de la elipse (3-40) en el plano rotado $x'y'$.

De (3-32), (3-33) y (3-34) se tiene las siguientes desigualdades:

$$\frac{(b-c)\mu + 4a|a| - (c+b)|c+b|}{2b\mu} > 0, \quad (3-41)$$

$$\frac{(b-c)\mu - 4a|a| + (c+b)|c+b|}{2b\mu} > 0, \quad (3-42)$$

$$\frac{\xi}{b} > 0. \quad (3-43)$$

Por tanto, si $b > 0$, de (3-41), (3-42) y (3-43) se tiene:

$$(b-c)\mu + 4a|a| - (c+b)|c+b| > 0, \quad (3-44)$$

$$(b-c)\mu - 4a|a| + (c+b)|c+b| > 0, \quad (3-45)$$

$$\xi > 0. \quad (3-46)$$

Si $b < 0$, de (3-41), (3-42) y (3-43) se tiene:

$$(b-c)\mu + 4a|a| - (c+b)|c+b| < 0, \quad (3-47)$$

$$(b-c)\mu - 4a|a| + (c+b)|c+b| < 0, \quad (3-48)$$

$$\xi < 0. \quad (3-49)$$

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, se consideran los siguientes casos para los valores de a y b :

- (i) $a > 0$ y $b > 0$,
- (ii) $a > 0$ y $b < 0$,
- (iii) $a < 0$ y $b > 0$,
- (iv) $a < 0$ y $b < 0$.

A continuación, se analizan los casos del (i) al (iv).

(i) $a > 0$ y $b > 0$.

Si $a > 0$, se tiene que $c + b < 0$, luego

$$4a|a| - (c + b)|c + b| = 4a^2 + (c + b)^2 > -4a^2 - (c + b)^2 = -4a|a| + (c + b)|c + b|.$$

Por tanto,

$$(b - c)\mu + 4a|a| - (c + b)|c + b| > (b - c)\mu - 4a|a| + (c + b)|c + b|. \quad (3-50)$$

Si $b > 0$, se tiene (3-44), (3-45) y (3-46), luego

$$\frac{1}{(b - c)\mu - 4a|a| + (c + b)|c + b|} > \frac{1}{(b - c)\mu + 4a|a| - (c + b)|c + b|}. \quad (3-51)$$

De (3-46) y (3-51) se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{2\mu\xi}{(b - c)\mu - 4a|a| + (c + b)|c + b|} > \frac{2\mu\xi}{(b - c)\mu + 4a|a| - (c + b)|c + b|}.$$

Por tanto, si $a > 0$ y $b > 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado y' .

(ii) $a > 0$ y $b < 0$.

Si $a > 0$, del caso (i) se cumple (3-50) y si $b < 0$, se cumple (3-47), (3-48) y (3-49), luego

$$\frac{1}{(b - c)\mu - 4a|a| + (c + b)|c + b|} > \frac{1}{(b - c)\mu + 4a|a| - (c + b)|c + b|}.$$

De (3-49) y (3) se sigue que

$$\frac{2\mu\xi}{(b - c)\mu - 4a|a| + (c + b)|c + b|} < \frac{2\mu\xi}{(b - c)\mu + 4a|a| - (c + b)|c + b|}.$$

Por tanto, si $a > 0$ y $b < 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado x' .

(iii) $a < 0$ y $b > 0$,

De forma análoga al caso (i), se prueba que la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado x' .

(iv) $a < 0$ y $b < 0$.

De forma análoga al caso (ii), se prueba que la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado y' .

De los casos (i), (ii), (iii) y (iv) se tiene lo siguiente: si $\frac{a}{b} < 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado x' y si $\frac{a}{b} > 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado y' .

3.2 $\frac{a}{c+b} > 0$.

De forma análoga al caso 3.1, se tiene que la ecuación

$$\frac{(x')^2}{2\mu\xi(\mu(b - c) + 4a|a| + (c + b)|c + b|)^{-1}} + \frac{(y')^2}{2\mu\xi(\mu(b - c) - 4a|a| + (c + b)|c + b|)^{-1}} = 1 \quad (3-52)$$

representa a la elipse (3-15) en el plano rotado $x'y'$, donde los ejes x' y y' están rotados con respecto a los ejes coordenados x y y un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$, además, dicha elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado y' si $\frac{a}{b} > 0$ ó sobre el eje rotado x' si $\frac{a}{b} < 0$.

4. $a \neq 0$ y $\frac{c}{b} = -1$.

Si $a \neq 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, por (3-10) y (3-11) se obtiene la siguiente ecuación

$$x^2(t) + 2\frac{a}{b}x(t)y(t) + y^2(t) = \xi, \quad (3-53)$$

donde ξ está definido en la ecuación (3-16).

Como se comprobó anteriormente, la ecuación (3-53) representa una elipse en el plano xy . Como $A = C$, por el Teorema 2, se suprime el término xy girando los ejes coordenados x y y un ángulo agudo positivo θ tal que $\theta = \pi/4$.

Las ecuaciones de transformación por rotación vienen dadas por

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\pi/4) - y' \sin(\pi/4) = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y &= x' \sin(\pi/4) + y' \cos(\pi/4) = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de x y y en (3-53) y manipulando algebraicamente se obtiene

$$(x')^2(b+a) + (y')^2(b-a) = \xi \quad (3-54)$$

Como $c = -b$, por (3-3) se tiene que $b^2 - a^2 > 0$, es decir, $(b-a)(b+a) > 0$, por tanto, $b-a \neq 0$ y $b+a \neq 0$, luego de (3-54) se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{(x')^2}{\xi(b+a)^{-1}} + \frac{(y')^2}{\xi(b-a)^{-1}} = 1. \quad (3-55)$$

La ecuación (3-55) representa a la elipse (3-15) en el plano rotado $x'y'$, donde los ejes x' y y' están rotados con respecto a los ejes coordenados x y y un ángulo θ tal que $\theta = \pi/4$.

A continuación, se determina la posición del eje mayor de la elipse (3-55) en el plano rotado $x'y'$.

En primer lugar, se verifica lo siguiente:

$$\frac{b+a}{b} > 0, \quad (3-56)$$

$$\frac{b-a}{b} > 0, \quad (3-57)$$

$$\frac{\xi}{b} > 0. \quad (3-58)$$

A continuación, se prueba que $\frac{b-a}{b} > 0$ y $\frac{b+a}{b} > 0$.

Como $c = -b$, por (3-3) se tiene que $b^2 - a^2 > 0$, es decir, $(b-a)(b+a) > 0$, luego se presentan los siguientes casos:

- (i) $b - a > 0$ y $b + a > 0$,
- (ii) $b - a < 0$ y $b + a < 0$.

A continuación, se analizan los casos (i) y (ii).

- (i) $b - a > 0$ y $b + a > 0$.

Si $b - a > 0$ y $b + a > 0$, se tiene que $b > a$ y $b > -a$, por tanto, $b > 0$, luego $\frac{b-a}{b} > 0$ y $\frac{b+a}{b} > 0$.

- (ii) $b - a < 0$ y $b + a < 0$.

Si $b - a < 0$ y $b + a < 0$, de forma análoga al caso (i), se tiene que $\frac{b-a}{b} > 0$ y $\frac{b+a}{b} > 0$.

De (3-54), (3-56) y (3-57) se sigue (3-58).

Por tanto, si $b > 0$, de (3-56), (3-57) y (3-58) se obtiene las siguientes desigualdades:

$$b + a > 0, \quad (3-59)$$

$$b - a > 0, \quad (3-60)$$

$$\xi > 0. \quad (3-61)$$

Si $b < 0$, de (3-56), (3-57) y (3-58) se obtiene las siguientes desigualdades:

$$b + a < 0, \quad (3-62)$$

$$b - a < 0, \quad (3-63)$$

$$\xi < 0. \quad (3-64)$$

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, se consideran los siguientes casos para los valores de a y b :

- (i) $a > 0$ y $b > 0$,
- (ii) $a > 0$ y $b < 0$,
- (iii) $a < 0$ y $b > 0$,
- (iv) $a < 0$ y $b < 0$.

A continuación, se analizan los casos del (i) al (iv).

- (i) $a > 0$ y $b > 0$.

Si $a > 0$ y $b > 0$, claramente $b + a > b - a$; luego, como $b > 0$, de (3-59) y (3-60) se tiene

$$\frac{1}{b - a} > \frac{1}{b + a}, \quad (3-65)$$

luego por (3-61) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{\xi}{b - a} > \frac{\xi}{b + a}.$$

Por tanto, si $a > 0$ y $b > 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado y' .

(ii) $a > 0$ y $b < 0$

Si $a > 0$ y $b < 0$, se tiene que $b + a > b - a$; luego, como $b < 0$, de (3-62) y (3-63) se tiene

$$\frac{1}{b - a} > \frac{1}{b + a},$$

luego por (3-64) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{\xi}{b - a} < \frac{\xi}{b + a}.$$

Por tanto, si $a > 0$ y $b < 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado x' .

(iii) $a < 0$ y $b > 0$

De forma análoga al caso (i), se prueba que la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado x' .

(iv) $a < 0$ y $b < 0$.

De forma análoga al caso (ii), se prueba que la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado y' .

De los casos (i), (ii), (iii) y (iv) se tiene lo siguiente: si $\frac{a}{b} < 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado x' y si $\frac{a}{b} > 0$, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje rotado y' .

Finalmente, se verifica que el sentido de las trayectorias del sistema (3-1) es dextrógiro si $b > 0$ y levógiro si $b < 0$.

Como $b \neq 0$, se consideran los casos: $b > 0$ y $b < 0$.

(i) $b > 0$.

Como las trayectorias son elipses o circunferencias centradas en el origen, estas interceptan el eje x positivo, por tanto, se considera la condición inicial $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$. A continuación, se verifica que para cualquier valor de t , lo suficientemente pequeño, la trayectoria que inicia en $(x_0, 0)$ se encuentra en el cuarto cuadrante del plano fase.

Por (3-4) y (3-5), se tiene que la solución del sistema (3-1) con condición inicial $(x_0, 0)$ viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left[\frac{a}{\gamma} \sin(t\gamma) + \cos(t\gamma) \right], \\ y(t) &= \frac{cx_0}{\gamma} \sin(t\gamma). \end{aligned}$$

Si t es tal que

$$0 < t < \frac{\pi}{2\gamma},$$

se tiene

$$\sin(t\gamma) > 0.$$

Por tanto, como $x_0 > 0$, $\gamma = \sqrt{-a^2 - bc} > 0$ y $c < 0$, pues c y b son de signos opuestos, se sigue que $y(t) < 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2\gamma})$.

Por otro lado, como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x_0 \left[\frac{a}{\gamma} \sin(t\gamma) + \cos(t\gamma) \right] = x_0,$$

por la definición ε - δ de límite por la derecha, se tiene que para $\varepsilon = x_0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < t < \delta$, entonces $|x(t) - x_0| < x_0$ o lo que es equivalente $0 < x(t) < 2x_0$. Luego si $t \in (0, \delta)$, se tiene que $x(t) > 0$.

Por tanto, para cualquier t tal que

$$0 < t < \min \left\{ \frac{\pi}{2\gamma}, \delta \right\},$$

se tiene que $y(t) < 0$ y $x(t) > 0$, lo que implica que la trayectoria se encuentra en el cuarto cuadrante del plano fase, por tanto, la trayectoria inicia en el punto $(x_0, 0)$ cuando $t = 0$ y continua hacia el cuarto cuadrante, es decir, el sistema evoluciona en sentido dextrógiro.

(ii) $b < 0$.

De forma análoga al caso (i), se tiene que las trayectorias del sistema (3-1) evolucionan en sentido levógiro. \square

4 De un sistema con saturación a un sistema de Filippov

En esta sección se construye un sistema con saturación, planteado en la sección 2.2, tal que la dinámica que empuja contra la saturación presenta un centro en el origen. Posteriormente, se transforma dicho sistema con saturación en un sistema de Filippov, se calculan todos los puntos deslizantes especiales y, utilizando el Teorema 3, se describen todas las formas posibles que pueda tener los retratos de fase del sistema de Filippov calculado.

A continuación, se construye un sistema con saturación tal que la dinámica que empuja contra la saturación presenta un centro en el origen. Para esto se considera el sistema (3-1) bajo las condiciones (3-2) y (3-3), además, se considera la saturación

$$y = h \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4-1)$$

Observación 2. *h puede ser un número positivo, negativo o igual a cero.*

Luego la región admisible viene dada por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \leq h\},$$

mientras que la región no admisible viene dada por

$$\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y > h\}.$$

El sistema en la saturación (dinámica deslizante) viene dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{S1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4-2)$$

siempre que $y = h$ y $cx - ah \geq 0$, donde $F_{S1}(x) = ax + bh$.

De (4-2) y (3-1) se tiene el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ F_S(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (4-3)$$

donde

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx - ay \end{pmatrix}, \quad (4-4)$$

$$F_S(x, y) = \begin{pmatrix} F_{S1}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

y

$$\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h \wedge cx \geq ah\},$$

$$\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq h \wedge x \in \mathbb{R}\} \cap \Omega_2^c.$$

El sistema (4-3) representa un sistema con saturación, el cual se ilustra en la Figura 4-1, donde el sistema dado por el campo F_1 presenta un centro en el origen y la saturación viene dada por (4-1).

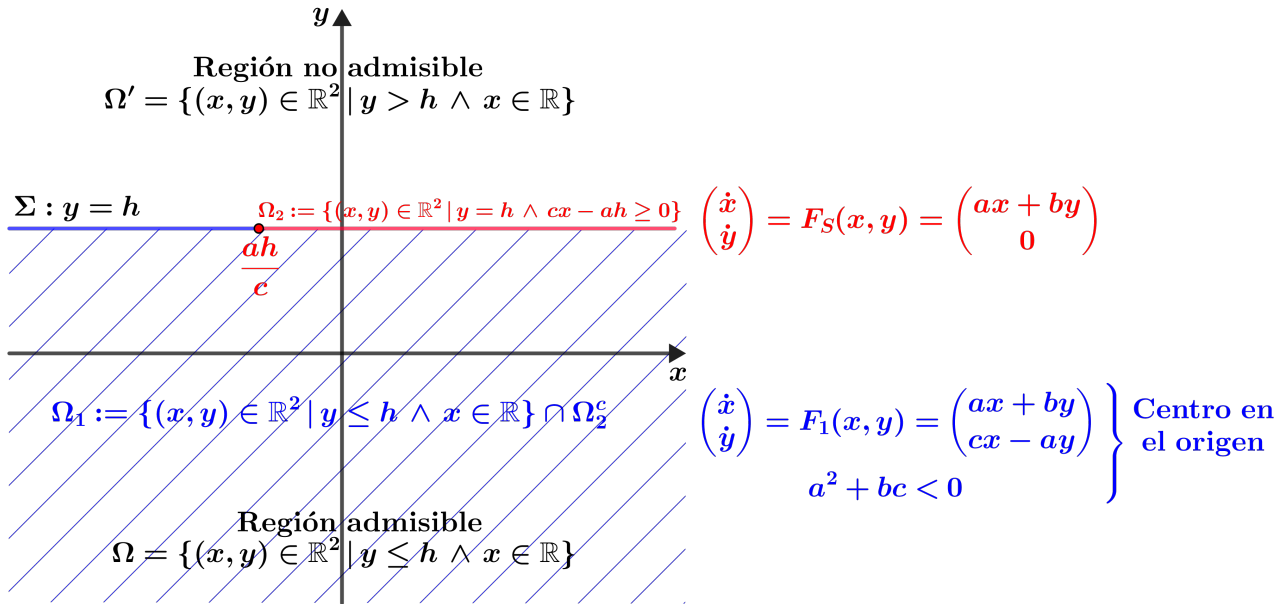


Figura 4-1: Sistema con saturación (4-3), donde la saturación viene dada por la recta $y = h$, el sistema $\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}^\top = F_1(x, y)$ definido en Ω_1 (azul) presenta un centro en el origen, $\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}^\top = F_S(x, y)$ definido en Ω_2 , línea roja, se presenta en rojo y las regiones admisible y no admisible se definen por Ω y Ω' , respectivamente.

A continuación, se transforma el sistema con saturación (4-3) en un sistema de Filippov; para esto, se calcula un campo F_2 , el cual deberá estar definido en la clausura de la región no admisible tal que la frontera de conmutación, Σ , coincida con la saturación (4-1), el campo F_1 este definido en $\bar{\Omega}_1$ y la dinámica deslizante del sistema de Filippov esté dada por F_S en Ω_2 , esto último implica que la zona deslizante deberá estar dada por Ω_2 y la zona cruce, Ω_3 , viene dada por el complemento de Ω_2 en la frontera de conmutación, es decir,

$$\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h \wedge cx < ah\}.$$

En primer lugar, se define la función evento, $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de la siguiente forma

$$H(x, y) = y - h.$$

En términos de la función $H(x, y)$ se definen las diferentes regiones que componen el sistema de Filippov:

$$\Sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}, \quad (4-6)$$

$$S_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) < 0\}, \quad (4-7)$$

$$S_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) > 0\}. \quad (4-8)$$

El campo F_1 se define en $\overline{S_1}$ y la frontera de conmutación, Σ , se divide en dos partes: la zona de cruce,

$$\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0 \wedge cx - ah < 0\}, \quad (4-9)$$

y la zona de deslizamiento,

$$\Sigma_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0 \wedge cx - ah \geq 0\}. \quad (4-10)$$

En esta última se define la dinámica deslizante $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_S(x, y)$.

A continuación, se calcula el campo $F_2 = (F_{21}, F_{22})$, el cual, con el fin de obtener un sistema de Filippov, debe estar definido en $\overline{S_2}$ y debe cumplir las siguientes condiciones:

1. $F_2 = (F_{21}, F_{22})$ debe ser suave en $\overline{S_2}$.
2. Para todo $(x, y) \in \Sigma_S$ se debe tener lo siguiente:

2.1.

$$F_S(x, y) = \lambda F_1(x, y) + (1 - \lambda) F_2(x, y),$$

donde

$$\lambda = \frac{\langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) \rangle}{\langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) - F_1(x, y) \rangle}.$$

2.2.

$$\langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle \langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) \rangle \leq 0.$$

3. Para todo $(x, y) \in \Sigma_c$,

$$\langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle \langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) \rangle > 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \nabla H(x, y) &= (0, 1), \\ F_1(x, y) &= (ax + by, cx - ay), \\ F_2(x, y) &= (F_{21}(x, y), F_{22}(x, y)), \\ F_S(x, y) &= (ax + bh, 0), \end{aligned}$$

de la condición 2.1 se tiene

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{F_{22}}{F_{22} - cx + ay} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx - ay \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{F_{22}}{F_{22} - cx + ay}\right) \begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix}, \quad (4-11)$$

Como $F_{21}(x, y)$ tiene que ser una función suave en $\overline{S_2}$, de (4-11) se obtiene

$$F_{21}(x, y) = ax + by. \quad (4-12)$$

Por tanto, de 1, 2.2, 3 y (4-12), se sigue que F_{22} debe ser una función suave en $\overline{S_2}$ tal que

- $F_{22}(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_S$
- y
- $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_c$.

En este trabajo, se considera $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma = \Sigma_S \cup \Sigma_c$, ya que para el caso en que $F_{22}(x, y) \leq 0$ en Σ_S , el sistema deslizante podría exhibir puntos singulares, equilibrios de frontera que no se encuentran en la frontera de la zona deslizante e incluso infinitos puntos tangentes. Por tanto, el campo F_2 es de la forma

$$F_2(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ F_{22}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4-13)$$

donde F_{22} es suave en $\overline{S_2}$ y negativa en Σ .

De los cálculos anteriores se obtiene el siguiente sistema de Filippov

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in S_1, \\ F_2(x, y), & (x, y) \in S_2, \end{cases} \quad (4-14)$$

donde F_1 , F_2 , S_1 y S_2 están dadas por (4-4), (4-13), (4-7), (4-8), respectivamente. El campo, F_S , que define la dinámica deslizante; la zona de cruce, Σ_c , y la zona deslizante, Σ_S , están dadas por (4-5), (4-9), (4-10), respectivamente.

En la Figura 4-2, se ilustra el sistema de Filippov (4-14).

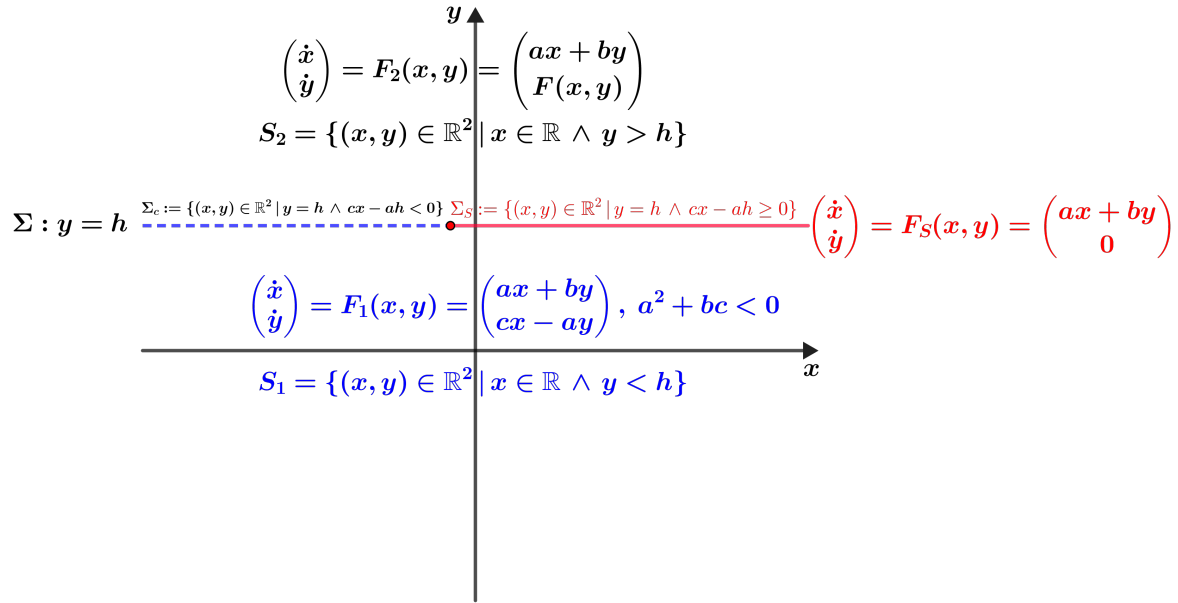


Figura 4-2: Sistema de Filippov (4-14), donde la frontera de conmutación, Σ , viene dada por la recta $y = h$, el sistema $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_1(x, y)$ definido en S_1 (azul) sujeto a la condición $a^2 + bc < 0$ presenta un centro en el origen, $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_2(x, y)$ definido en S_2 se presenta en negro, la dinámica deslizante $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_S(x, y)$ definida en Σ_S , línea roja, se presenta en rojo y la zona de cruce Σ_c se representa por la línea punteada azul.

4.1. Puntos deslizantes especiales

A continuación, se calculan los diferentes puntos deslizantes especiales para los diferentes valores que puede tomar h : $h > 0$, $h = 0$ y $h < 0$.

1. **Para $h > 0$.**

- **Puntos deslizantes singulares**

Para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) - F_1(x, y) \rangle &= \langle (0, 1), (0, F_{22}(x, y) - cx + ay) \rangle \\ &= F_{22}(x, y) - (cx - ay) \\ &< 0, \end{aligned}$$

esta última desigualdad se tiene, ya que $F_{22}(x, y) < 0$ y $cx - ay \geq 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_S$, por tanto, cuando $h > 0$ el sistema no presenta puntos deslizantes singulares.

• **Pseudo-equilibrios**

Para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$F_S(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bh \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se analizan los casos $a = 0$ y $a \neq 0$.

◦ $a = 0$

Si $a = 0$, se tiene

$$F_S(x, y) = \begin{pmatrix} bh \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si $a = 0$, el sistema no presenta pseudo-equilibrios.

◦ $a \neq 0$

Si $a \neq 0$, la solución de la ecuación

$$F_S(x, y) = 0,$$

es decir,

$$ax + bh = 0$$

viene dada por

$$\begin{aligned} x &= -\frac{bh}{a}, \\ y &= h, \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$, a puede ser positivo o negativo. A continuación, se analizan estos dos casos.

◊ $a > 0$

Si $a > 0$, el punto $(-\frac{bh}{a}, h)$ es tal que $F_1(-\frac{bh}{a}, h)$ y $F_2(-\frac{bh}{a}, h)$ son diferentes de cero y $(-\frac{bh}{a}, h) \in \Sigma_S$. En efecto, por (3-3) y dado que $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$ se sigue:

$$\begin{aligned} F_1\left(-\frac{bh}{a}, h\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{a}(-cb - a^2) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ F_2\left(-\frac{bh}{a}, h\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ F_{22}(-\frac{bh}{a}, h) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Además, por (3-3), se tiene que $(-\frac{bh}{a}, h) \in \Sigma_S$, ya que

$$cx - ay = c\left(-\frac{bh}{a}\right) - ah = \frac{h}{a}(-cb - a^2) > 0.$$

Por tanto, si $a > 0$, el punto $(-\frac{bh}{a}, h)$ es un pseudo-equilibrio, además, este es inestable en Σ , ya que

$$F'_{S1} \left(-\frac{bh}{a} \right) = a > 0.$$

◇ $a < 0$

Si $a < 0$, de (3-3) se tiene que $(-\frac{bh}{a}, h) \notin \Sigma_S$, ya que

$$cx - ay = c \left(-\frac{bh}{a} \right) - ah = \frac{h}{a}(-cb - a^2) < 0.$$

Por tanto, si $a < 0$, no existen pseudo-equilibrios.

• Equilibrios de frontera

Para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} ax + ay \\ cx - ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + ah \\ cx - ah \end{pmatrix}.$$

Se analizan los casos $a = 0$ y $a \neq 0$.

○ $a = 0$

Si $a = 0$, se tiene

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} bh \\ cx \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S.$$

Por tanto, si $a = 0$, el sistema no presenta equilibrios de frontera con respecto a F_1 .

○ $a \neq 0$

Si $a \neq 0$, de la ecuación

$$F_1(x, y) = 0,$$

es decir,

$$ax + bh = 0$$

$$cx - ah = 0,$$

se tiene que $-a^2 - bc = 0$, lo cual es una contradicción, ya que por (3-3) $-a^2 - bc > 0$, por tanto, si $a \neq 0$, el sistema no presenta equilibrios de frontera con respecto a F_1 .

Por otro lado, como

$$F_2(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ F_{22}(x, y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S,$$

ya que $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$, se tiene que el sistema no presenta equilibrios de frontera con respecto a F_2 .

• **Puntos tangentes**

Para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$\langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle = \langle (0, 1), (ax + bh, cx - ah) \rangle = cx - ah.$$

La solución de la ecuación

$$\langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle = 0,$$

es decir,

$$cx - ah = 0$$

viene dada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{ah}{c}, \\ y &= h. \end{aligned}$$

El punto $(\frac{ah}{c}, h)$ es tal que $F_1(\frac{ah}{c}, h) \neq 0$, $F_2(\frac{ah}{c}, h) \neq 0$ y $(\frac{ah}{c}, h) \in \Sigma_S$. En efecto, por (3-3) y dado que $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{ah}{c}, h\right) &= \begin{pmatrix} \frac{h}{c}(a^2 + bc) \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ F_2\left(\frac{ah}{c}, h\right) &= \begin{pmatrix} \frac{h}{c}(a^2 + bc) \\ F_{22}(\frac{ah}{c}, h) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Además, se tiene que $(\frac{ah}{c}, h) \in \Sigma_S$, ya que $cx - ay = c(\frac{ah}{c}) - ah = 0$, por tanto, el punto $(\frac{ah}{c}, h)$ es un punto tangente con respecto a F_1 .

A continuación, se muestra que dicho punto tangente es visible, para esto se verificara que la trayectoria de $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_1(x, y)$ comenzando en el punto tangente, $(\frac{ah}{c}, h)$, pertenece a S_1 para todo $|t| \neq 0$ lo suficientemente pequeño.

Se tiene que la solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_1(x, y), & (x, y) \in S_1, \\ (x_0, y_0) = (\frac{ah}{c}, h), \end{cases}$$

viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{h}{c} \left(a \cos \left(t\sqrt{-a^2 - bc} \right) - \sqrt{-a^2 - bc} \sin \left(t\sqrt{-a^2 - bc} \right) \right), \\ y(t) &= h \cos(t\sqrt{-a^2 - bc}). \end{aligned}$$

Como para todo $|t| \neq 0$ lo suficientemente pequeño

$$\cos(t\sqrt{-a^2 - bc}) < 1,$$

se tiene la siguiente desigualdad

$$y(t) = h \cos(t\sqrt{-a^2 - bc}) < h,$$

luego para todo $|t| \neq 0$ lo suficientemente pequeño $(x(t), y(t)) \in S_1$, por tanto, $(\frac{ah}{c}, h)$ es un punto tangente visible.

Por otro lado, para todo $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$\langle \nabla H(x, y), F_2(x, y) \rangle = \langle (0, 1), (ax + bh, F_{22}(x, y)) \rangle = F_{22}(x, y) \neq 0,$$

ya que $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$, por tanto, no existe un punto tangente con respecto a F_2 .

2. Para $h = 0$.

Si $h = 0$, se tiene que $\Sigma_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, cx \geq 0\}$, luego para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \begin{pmatrix} ax \\ cx \end{pmatrix}, \\ F_2(x, y) &= \begin{pmatrix} ax \\ F_{22}(x, y) \end{pmatrix}, \\ F_S(x, y) &= \begin{pmatrix} F_{S1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $F_{S1}(x) = ax$ y $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$.

• Puntos deslizantes singulares

De forma análoga al caso $h > 0$, se tiene que el sistema no presenta puntos deslizantes singulares.

• Pseudo-equilibrios

Para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$F_S(x, y) = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación, se analizan los casos $a = 0$ y $a \neq 0$.

- $a \neq 0$

Si $a \neq 0$, la solución de la ecuación

$$F_S(x, y) = 0,$$

es decir,

$$ax = 0$$

viene dada por

$$x = 0,$$

$$y = 0.$$

Como $F_1(0, 0) = (0 \ 0)^\top$, se tiene que el punto $(0, 0)$ no es un pseudo-equilibrio, por tanto, si $a \neq 0$, el sistema no presenta pseudo-equilibrios.

- $a = 0$

Si $a = 0$, se tiene:

$$F_S(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S,$$

$$F_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{22}(x, y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S.$$

Además,

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ cx \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \neq 0$, ya que de (3-3) se tiene que $c \neq 0$.

Por tanto, todo elemento del conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, cx > 0\} = \Sigma_S - \{(0, 0)\}$$

es un pseudo-equilibrio. Por tanto, el sistema presenta una singularidad lineal [17].

Observación. Los pseudo-equilibrios son de la forma $(x, 0)$ con $x \neq 0$, tal que $cx > 0$, es decir, tal que c y x son diferentes de cero y tienen el mismo signo.

• Equilibrios de frontera

Para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} ax \\ cx \end{pmatrix}.$$

Como $c \neq 0$, la solución, en Σ , de la ecuación

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Como $(0, 0) \in \Sigma_S$, ya que $y = 0$ y $cx = c(0) = 0$, se sigue que el punto $(0, 0)$ es un equilibrio de frontera con respecto a F_1 , además, dado que

$$F'_{S1}(0) = a,$$

se tiene que dicho pseudo-equilibrio es estable o inestable en Σ si $a < 0$ ó $a > 0$, respectivamente. En el caso $a = 0$, el sistema deslizante es degenerado.

Por otro lado, como

$$F_2(x, y) \begin{pmatrix} ax \\ F_{22}(x, y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ya que $F_{22}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$, no existen equilibrios de frontera con respecto a F_2 .

• Puntos tangentes

Para $(x, y) \in \Sigma_S$ se tiene

$$\langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle = \langle (0, 1), (ax, cx) \rangle = cx.$$

La solución, en Σ_S , de la ecuación

$$\langle \nabla H(x, y), F_1(x, y) \rangle = 0$$

viene dada por

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Como $F_1(0, 0) = (0 \ 0)^\top$, el punto $(0, 0)$ no es un punto tangente con respecto a F_1 , por tanto, el sistema no presenta puntos tangentes con respecto a F_1 , además, de forma análoga al caso $h > 0$, se tiene que el sistema no presenta puntos tangentes con respecto a F_2 .

3. Para $h < 0$.

- **Puntos deslizantes singulares**

De forma análoga al caso $h > 0$, se tiene que el sistema no presenta puntos deslizantes singulares.

- **Pseudo-equilibrios**

De forma análoga al caso $h > 0$, se tiene lo siguiente:

- Si $a \geq 0$, el sistema no presenta pseudo-equilibrios.
- Si $a < 0$, el sistema presenta un pseudo-equilibrio en el punto $(-\frac{bh}{a}, h)$, el cual es estable en Σ .

- **Equilibrios de frontera**

De forma análoga al caso $h > 0$, se tiene que el sistema no presenta equilibrios de frontera.

- **Puntos tangentes**

De forma análoga al caso $h > 0$, se tiene que el sistema presenta un punto tangente invisible con respecto a F_1 en $(\frac{ah}{c}, h)$ y no presenta puntos tangentes con respecto a F_2 .

Resumen de los puntos deslizantes especiales para los diferentes valores de h

1. Para $h > 0$

- **Puntos deslizantes singulares**

El sistema no presenta puntos deslizantes singulares.

- **Pseudo-equilibrios**

- Si $a \leq 0$, el sistema no presenta pseudo-equilibrios
- Si $a > 0$, el sistema presenta un pseudo-equilibrio en el punto $(-\frac{bh}{a}, h)$, el cual es inestable en Σ .

- **Equilibrios de frontera**

El sistema no presenta equilibrios de frontera.

- **Puntos tangentes**

El sistema presenta un punto tangente visible con respecto a F_1 en $(\frac{ah}{c}, h)$.

2. Para $h = 0$.

- **Puntos deslizantes singulares**

El sistema no presenta puntos deslizantes singulares.

- **Pseudo-equilibrios**

- Si $a = 0$, todo elemento del conjunto

$$\Sigma_S - \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, cx > 0\}$$

es un pseudo-equilibrio. Por tanto, el sistema presenta una singularidad lineal [17].

- Si $a \neq 0$, el sistema no presenta pseudo-equilibrios.

- **Equilibrios de frontera**

El sistema presenta un equilibrio de frontera con respecto a F_1 en el punto $(0, 0)$

- **Puntos tangentes**

El sistema no presenta puntos tangentes.

3. Para $h < 0$

- **Puntos deslizantes singulares**

El sistema no presenta puntos deslizantes singulares.

- **Pseudo-equilibrios**

- Si $a < 0$, el sistema presenta un pseudo-equilibrio en el punto $(-\frac{bh}{a}, h)$, el cual es estable en Σ .
- Si $a \geq 0$, el sistema no presenta pseudo-equilibrios.

- **Equilibrios de frontera**

El sistema no presenta equilibrios de frontera.

- **Puntos tangentes**

El sistema presenta un punto tangente invisible con respecto a F_1 en $(\frac{ah}{c}, h)$.

Observación 3. *De los cálculos anteriores se puede observar que la existencia de puntos deslizantes singulares, puntos tangentes visibles o invisibles, equilibrios de frontera y pseudo-equilibrios estables o inestables del sistema de Filippov (4-14), únicamente depende de los parámetros a y h y es independiente de los parámetros b y c y del campo F_{22} , desde que este cumpla las condiciones para que se tenga un sistema de Filippov, es decir, desde que F_{22} sea suave en $\overline{S_2}$ y negativo en Σ .*

En la Tabla 4.1, se ilustran los puntos deslizantes especiales que presenta el sistema de Filippov (4-14) al variar los parámetros a y h entre positivos y negativos.

	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$h > 0$	1. $\left(\frac{ah}{c}, h\right)$ punto tangente visible.	1. $\left(\frac{ah}{c}, h\right)$ punto tangente visible.	1. $\left(\frac{ah}{c}, h\right)$ punto tangente visible. 2. $\left(-\frac{bh}{a}, h\right)$ pseudo-equilibrio inestable en Σ .
$h = 0$	1. $(0, 0)$ equilibrio de frontera estable en Σ .	1. $(0, 0)$ equilibrio de frontera. 2. $\Sigma_S - \{(0, 0)\}$ conjunto de pseudo-equilibrios (singularidad lineal).	1. $(0, 0)$ equilibrio de frontera inestable en Σ .
$h < 0$	1. $\left(\frac{ah}{c}, h\right)$ punto tangente invisible. 2. $\left(-\frac{bh}{a}, h\right)$ pseudo-equilibrio estable en Σ .	1. $(0, h)$ punto tangente invisible.	1. $\left(\frac{ah}{c}, h\right)$ punto tangente invisible.

Tabla 4-1: Puntos deslizantes especiales del sistema de Filippov (4-14) al variar los parámetros a y h entre positivos y negativos.

4.2. Retratos de fase del sistema de Filippov

Debido a que los sistemas $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_S(x, y)$ y $(\dot{x} \ \dot{y})^\top = F_1(x, y)$ definidos en Σ_S y S_1 , respectivamente, son independientes de la elección de F_{22} , la cual debe ser suave en $\overline{S_2}$ y negativa en Σ , se tiene que la dinámica del sistema Filippov, desde la frontera de conmutación hacia abajo, es independiente de la elección de F_{22} si ésta cumple las condiciones anteriormente mencionadas, por tanto, con el fin de mostrar como es el comportamiento del sistema de Filippov, en dicha región, se determinan sus diferentes retratos de fase en el caso particular en que

$$F_{22}(x, y) = L \quad \forall (x, y) \in \overline{S_2},$$

donde L es un número real negativo fijo.

El análisis se divide en tres casos: $a = 0$, $a < 0$ y $a > 0$. Para cada uno de estos se varia el parámetro h : $h > 0$, $h = 0$ y $h < 0$.

1. $a = 0$

Como $a = 0$, de los cálculos anteriores se tiene el siguiente sistema de Filippov

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in S_1, \\ F_2(x, y), & (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

donde

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} by \\ cx \end{pmatrix},$$

$$F_2(x, y) = \begin{pmatrix} by \\ L \end{pmatrix},$$

con $L < 0$. Las regiones S_1 , S_2 y la frontera de discontinuidad, Σ , se definen por medio de la función $H(x, y) = y - h$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < h\}, \\ S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > h\}, \\ \Sigma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h\}. \end{aligned}$$

La frontera Σ se divide en dos partes: la zona de cruce,

$$\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h \wedge cx < 0\},$$

y la zona de deslizamiento,

$$\Sigma_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h \wedge cx \geq 0\}.$$

La dinámica deslizante viene dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_S(x, y) = \begin{pmatrix} bh \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \Sigma_S. \quad (4-15)$$

Se tiene que la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_1(x, y) = \begin{pmatrix} by \\ cx \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \overline{S_1}, \quad (4-16)$$

con condición inicial (x_0, y_0) viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(t\sqrt{-bc}) + \frac{y_0 b}{\sqrt{-bc}} \sin(t\sqrt{-bc}), \\ y(t) &= \frac{x_0 c}{\sqrt{-bc}} \sin(t\sqrt{-bc}) + y_0 \cos(t\sqrt{-bc}). \end{aligned}$$

Además, como $a = 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-16) con condición inicial (x_0, y_0) son circunferencias centradas en el origen si $\frac{c}{b} = -1$ ó elipses con sus ejes mayor y menor sobre los ejes coordenados si $\frac{c}{b} \neq -1$, donde el eje mayor está sobre el eje x si $\frac{c}{b} > -1$ ó sobre el eje y si $\frac{c}{b} < -1$. Las ecuaciones de dichas trayectorias vienen dadas por

$$\frac{x^2(t)}{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2} + \frac{y^2(t)}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} = 1.$$

La solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_2(x, y) = \begin{pmatrix} by \\ L \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \overline{S_2}, \quad (4-17)$$

con $L < 0$ y condición inicial (x_0, y_0) viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{bL}{2}t^2 + y_0bt + x_0, \\ y(t) &= Lt + y_0. \end{aligned}$$

Manipulando algebraicamente esta solución se obtiene

$$x(t) = \frac{b}{2L}y^2(t) - \frac{b}{2L}y_0^2 + x_0.$$

Por tanto, las trayectorias del sistema (4-17) son parábolas. Como $L < 0$, la parábola abre hacia la izquierda si $b > 0$ ó a la derecha si $b < 0$. El vértice de la parábola viene dado por el punto $(x_0 - \frac{b}{2L}y_0^2, 0)$, luego todos los vértices están ubicados sobre el eje x .

La solución del sistema (4-15) con condición inicial (x_0, y_0) viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= bht + x_0, \\ y(t) &= y_0. \end{aligned}$$

Por tanto, las trayectorias del sistema (4-15) son líneas rectas horizontales.

A continuación, se determina los diferentes retratos de fase del sistema de Filippov para los diferentes valores de h : $h > 0$, $h = 0$ y $h < 0$.

1.1 $h > 0$

De (3-3) se tiene que $cb < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$, $c < 0$ y $b > 0$.

1.1.1 $c > 0$ y $b < 0$.

Como $b < 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-16), elipses ó circunferencias, giran en sentido levógiro.

Se consideran los siguientes casos para la condición inicial (x_0, y_0) en S_1 .

a) $\sqrt{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} < h$.

En este caso, la trayectoria del sistema (4-16) comenzando en el punto (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse o circunferencia y no corta la frontera de conmutación, Σ , ya que la longitud del radio de la circunferencia o del semieje de la elipse que se encuentra sobre el eje coordenado y , $\sqrt{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}$, es menor que h .

$$b) \sqrt{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} \geq h.$$

En este caso, la trayectoria del sistema (4-16) comenzando en el punto (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse o circunferencia hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h \right),$$

el cual está a la derecha del punto tangente visible, $(0, h)$.

Se supone que la trayectoria corta a Σ cuando $t = t_0$.

Como

$$\sigma \left(\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h \right) \leq 0,$$

la trayectoria es forzada a permanecer sobre Σ y a *deslizarse* sobre ella, dicho movimiento deslizante es definido por el sistema (4-15).

La solución del sistema (4-15) con condición inicial

$$(x(t_0), y(t_0)) = \left(\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h \right)$$

viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= bht + \beta - bht_0, \\ y(t) &= h, \end{aligned} \tag{4-18}$$

donde

$$\beta = \sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}.$$

El valor de t en que $x(t) = 0$ viene dado por

$$t_1 = \frac{bht_0 - \beta}{bh} > 0.$$

Como $x(t)$ es decreciente y continua en $[t_0, t_1]$, se tiene que la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la izquierda, hasta llegar al punto $(0, h)$ cuando $t = t_1 = \frac{bht_0 - \beta}{bh}$. Como $(0, h)$ es un punto tangente visible con respecto a F_1 y F_2 es transversal a Σ , la trayectoria sale de Σ y continua evolucionando en S_1 en forma de elipse ó circunferencia formándose un ciclo, además, por el Teorema 3, se tiene que la solución del sistema (4-16) con condición inicial $(x_0, y_0) = (0, h)$ satisface la siguiente ecuación

$$\frac{x^2(t)}{-\frac{b}{c}h^2} + \frac{y^2(t)}{h^2} = 1,$$

la cual describe a dicho ciclo.

En las Figuras 4-3a, 4-3b y 4-3c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{c}{b} < -1$, $\frac{c}{b} > -1$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

1.1.2 $c < 0$ y $b > 0$

Si $b > 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-16), elipses o circunferencias, giran en sentido dextrógiro y de forma análoga al caso 1.1.1, para una trayectoria comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , se tiene lo siguiente:

- a) Si $\sqrt{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} < h$, la trayectoria del sistema (4-16) evoluciona en forma de elipse o circunferencia y no corta a Σ .
- b) Si $\sqrt{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} \geq h$, la trayectoria del sistema (4-16) evoluciona en forma de elipse o circunferencia hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(-\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h \right),$$

luego, entra a Σ y se desliza sobre ella hasta llegar al punto tangente visible $(0, h)$, después entra a la región S_1 , evoluciona en forma de elipse ó circunferencia, llega nuevamente al punto $(0, h)$ y continua evolucionando en forma de elipse ó circunferencia formándose un ciclo.

En las Figuras 4-4a, 4-4b y 4-4c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{c}{b} < -1$, $\frac{c}{b} > -1$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

1.2 $h = 0$

De (3-3) se tiene que $cb < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$ ó $c < 0$ y $b > 0$.

1.2.1 $c > 0$ y $b < 0$

Si $b < 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-16) giran en sentido levógiro. Como la frontera de conmutación, Σ , está sobre el eje x y las trayectorias del sistema (4-16) son elipses ó circunferencias centradas en el origen, se tiene que cualquier trayectoria iniciando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(\sqrt{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2}, 0 \right).$$

Como

$$\sigma \left(\sqrt{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2}, 0 \right) \leq 0,$$

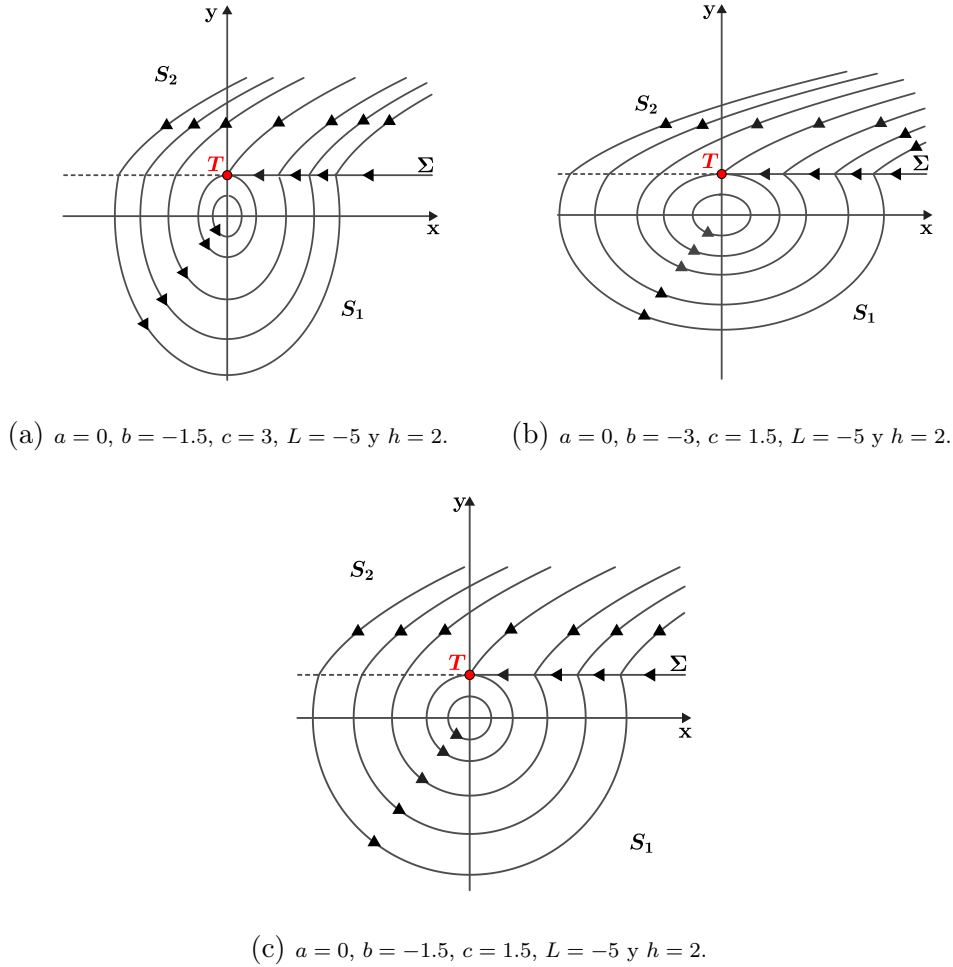


Figura 4-3: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a = 0, b < 0, c > 0$ y $h > 0$ tal que: (a) $\frac{c}{b} < -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje y ; (b) $\frac{c}{b} > -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje x y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de circunferencia. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por encima del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro, las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma de parábolas que abren hacia la derecha y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

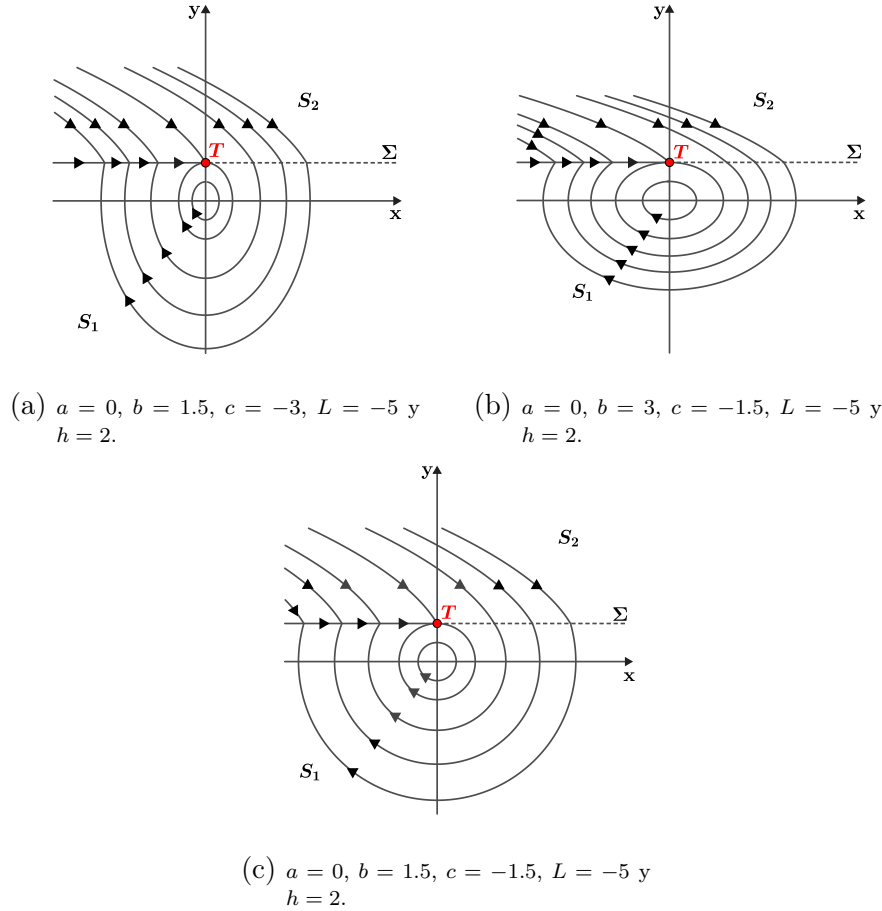


Figura 4-4: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a = 0, b > 0, c < 0$ y $h > 0$ tal que: (a) $\frac{c}{b} < -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje y ; (b) $\frac{c}{b} > -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje x y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de circunferencia. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por encima del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro, las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma de parábolas que abren hacia la izquierda y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

la trayectoria es forzada a permanecer sobre Σ . Como el conjunto de pseudo-equilibrios del sistema de Filippov, para el caso $h = 0$, viene dado por

$$\Sigma_S - (0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \wedge x > 0\},$$

y dado que el punto $(0, 0)$ es un equilibrio de frontera del sistema de Filippov y un equilibrio del sistema (4-15), se tiene que la trayectoria no desliza y permanece en el punto de corte $\left(\sqrt{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2}, 0\right)$.

En las Figuras **4-5a**, **4-5b** y **4-5c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{c}{b} < -1$, $\frac{c}{b} > -1$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

1.2.2 $c < 0$ y $b > 0$

como $b > 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-16) giran en sentido dextrógiro y de forma análoga al caso 1.2.1, se tiene que cualquier trayectoria iniciando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(-\sqrt{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2}, 0\right),$$

luego, la trayectoria es forzada a permanecer sobre Σ , no desliza y permanece en el punto de corte $\left(-\sqrt{x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2}, 0\right)$.

En las Figuras **4-6a**, **4-6b** y **4-6c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{c}{b} < -1$, $\frac{c}{b} > -1$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

1.3 $h < 0$

De (3-3) se tiene que $cb < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$ ó $c < 0$ y $b > 0$.

1.3.1 $c > 0$ y $b < 0$

Si $b < 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-16) giran en sentido levógiro. Como la frontera de conmutación, Σ , está por debajo del eje x y las trayectorias del sistema (4-16) son elipses ó circunferencias centradas en el origen, se tiene que cualquier trayectoria iniciando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right)\left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h\right),$$

el cual está a la derecha del punto tangente invisible, $(0, h)$.

Se supone que la trayectoria corta a Σ cuando $t = t_0$.

Como

$$\sigma\left(\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right)\left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h\right) \leq 0,$$

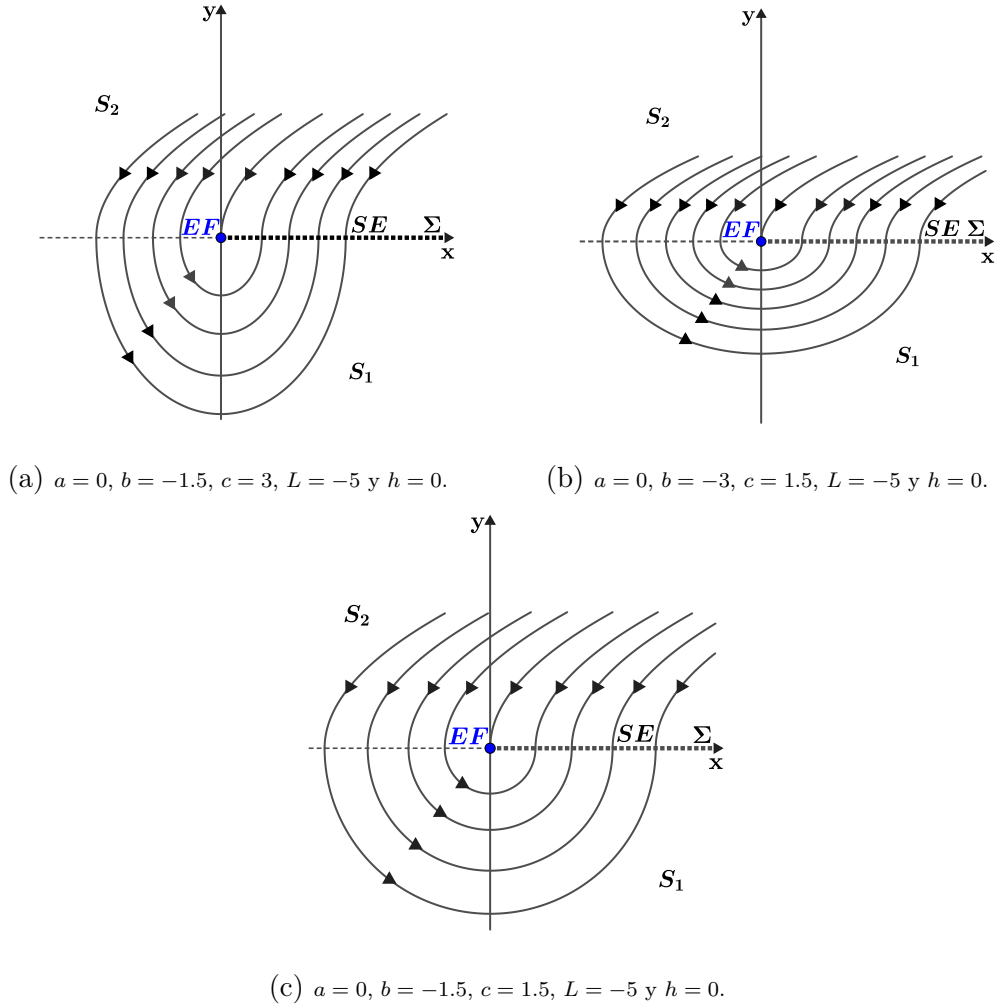


Figura 4-5: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a = 0, b < 0, c > 0$ y $h = 0$ tal que: (a) $\frac{c}{b} < -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje y ; (b) $\frac{c}{b} > -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje x y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de circunferencia. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra sobre el eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro, las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma de parábolas que abren hacia la derecha y la zona deslizante Σ_S está compuesta por infinitos pseudo-equilibrios (SE) y un equilibrio de frontera (EF) el cual se representa por un punto azul.

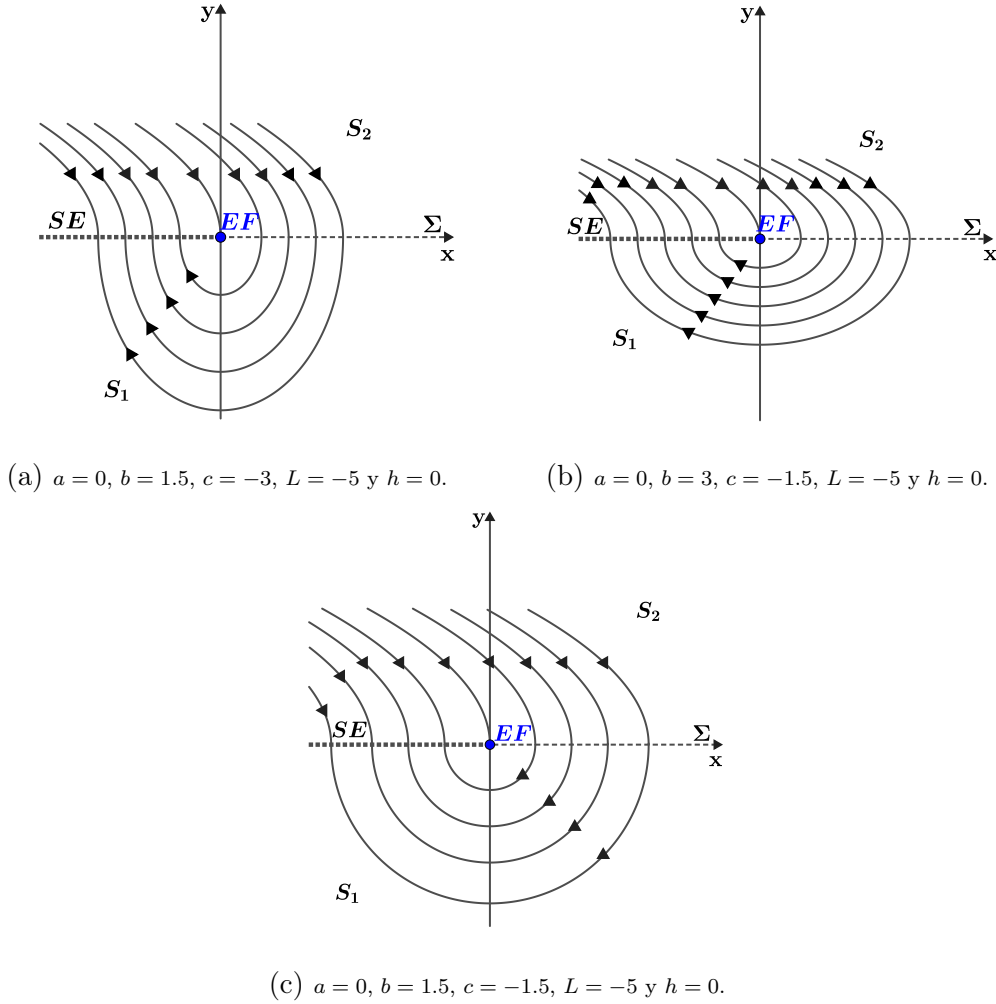


Figura 4-6: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a = 0, b > 0, c < 0$ y $h = 0$ tal que: (a) $\frac{c}{b} < -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje y ; (b) $\frac{c}{b} > -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje x y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de circunferencia. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ_S , se encuentra sobre el eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro, las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma de parábolas que abren hacia la izquierda y la zona deslizante Σ_S está compuesta por infinitos pseudo-equilibrios (SE) y un equilibrio de frontera (EF) el cual se representa por un punto azul.

la trayectoria es forzada a permanecer sobre Σ y a deslizarse sobre ella, dicho movimiento deslizante es definido por el sistema (4-15).

La solución del sistema (4-15) con condición inicial

$$(x(t_0), y(t_0)) = \left(\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h \right)$$

viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= bht + \beta - bht_0, \\ y(t) &= h, \end{aligned} \tag{4-19}$$

donde

$$\beta = \sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}.$$

Como $x(t)$ es creciente, continua y no está acotada superiormente en $[t_0, +\infty)$, se tiene que la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la derecha, tendiendo a más infinito.

En las Figuras 4-7a, 4-7b y 4-7c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{c}{b} < -1$, $\frac{c}{b} > -1$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

1.3.2 $c < 0$ y $b > 0$

Como $b < 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-16) giran en sentido dextrógiro y de forma análoga al caso 1.3.1, para una trayectoria comenzando en el punto $(x_0, y_0) \in S_1$, se tiene que esta corta a Σ en el punto

$$\left(-\sqrt{\left(x_0^2 - \frac{b}{c}y_0^2\right) \left(1 - \frac{h^2}{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2}\right)}, h \right),$$

el cual está a la izquierda del punto tangente invisible, $(0, h)$; luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la izquierda, tendiendo a menos infinito.

En las Figuras 4-8a, 4-8b y 4-8c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{c}{b} < -1$, $\frac{c}{b} > -1$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

Si $a \neq 0$, de los cálculos anteriores se tiene el siguiente sistema de Filippov

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1(x, y) & (x, y) \in S_1, \\ F_2(x, y) & (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

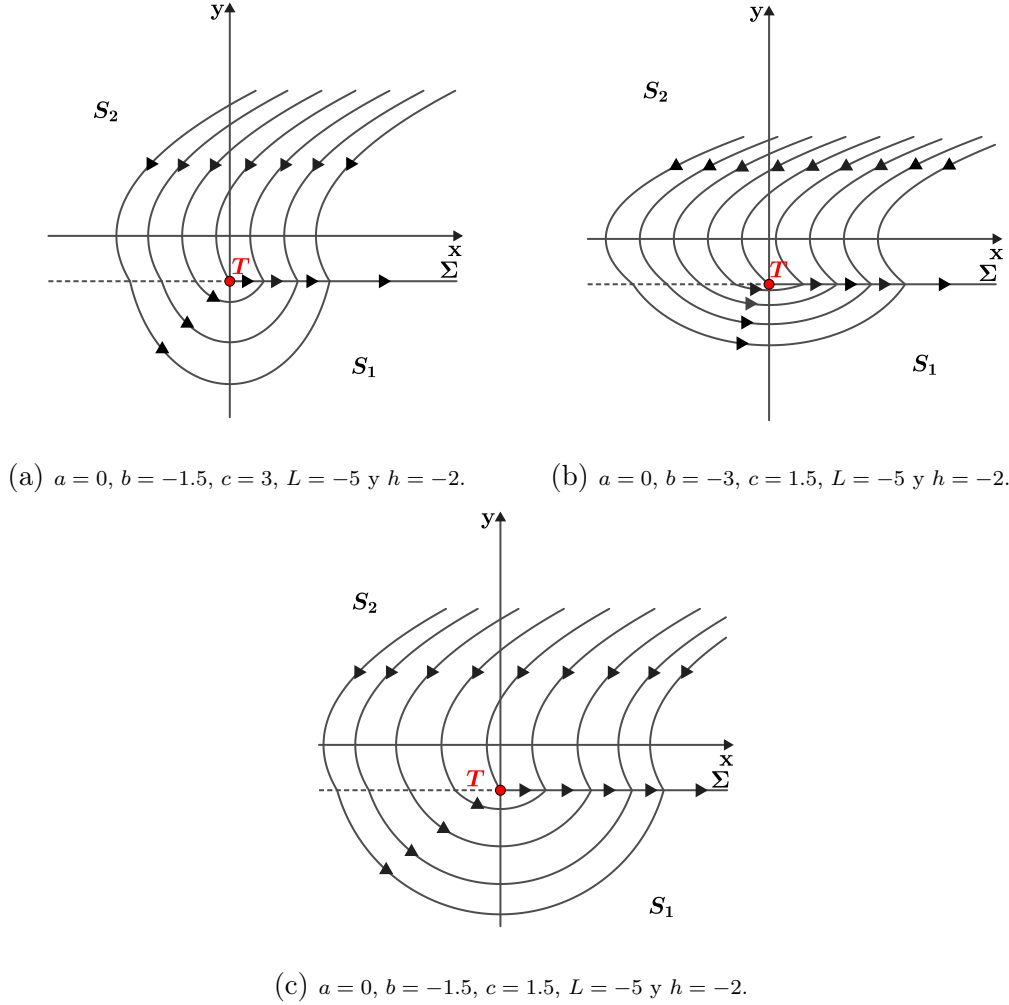


Figura 4-7: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a = 0, b < 0, c > 0$ y $h < 0$ tal que: (a) $\frac{c}{b} < -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje y ; (b) $\frac{c}{b} > -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje x y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de circunferencia. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por debajo del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro, las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma de parábolas que abren hacia la derecha y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente invisible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

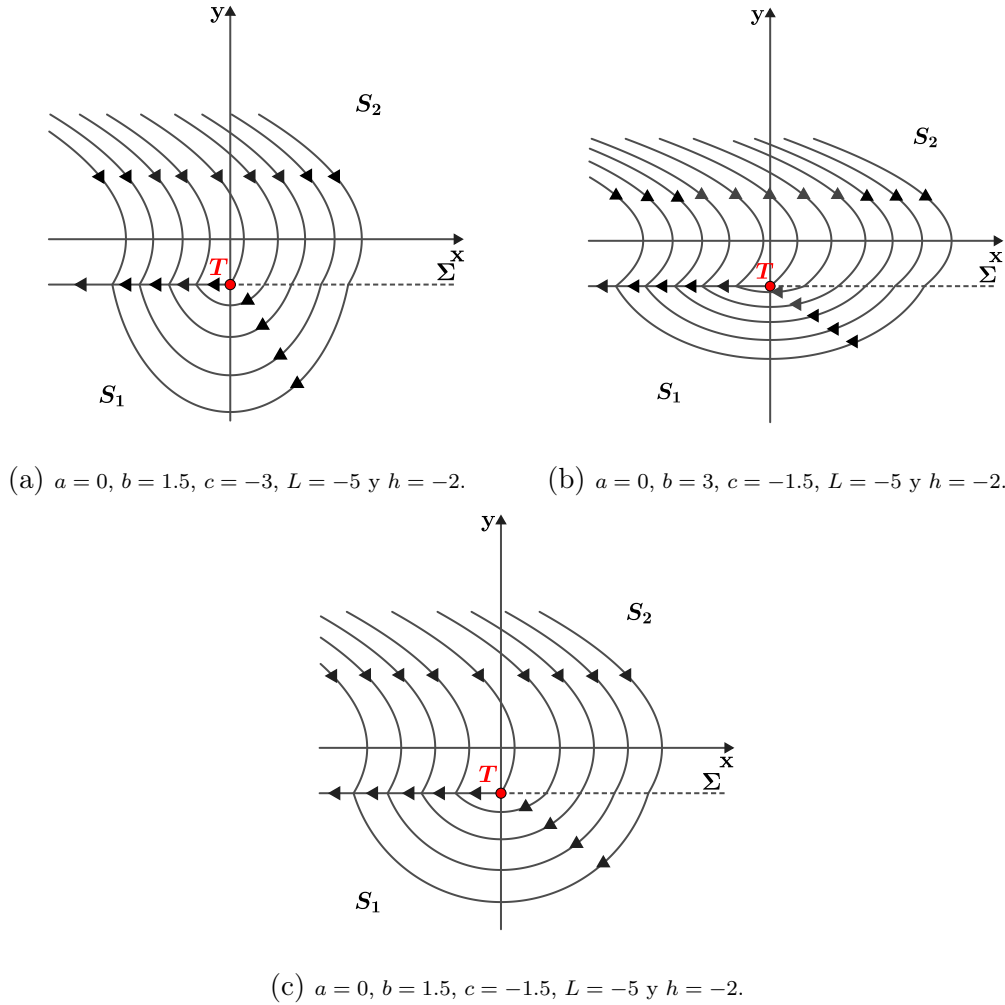


Figura 4-8: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a = 0, b > 0, c < 0$ y $h < 0$ tal que: (a) $\frac{c}{b} < -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje y ; (b) $\frac{c}{b} > -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde su eje mayor está sobre el eje x y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de circunferencia. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por debajo del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro, las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma de parábolas que abren hacia la izquierda y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente invisible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

donde

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx - ay \end{pmatrix},$$

$$F_2(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ L \end{pmatrix},$$

con $L < 0$. Las regiones S_1 , S_2 y la frontera de conmutación, Σ , se definen por medio de la función $H(x, y) = y - h$ de la siguiente forma:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < h\},$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > h\},$$

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h\}.$$

La frontera Σ se divide en dos partes: la zona de cruce,

$$\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0 \wedge cx - ay < 0\},$$

y la zona de deslizamiento,

$$\Sigma_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0 \wedge cx - ay \geq 0\}.$$

La dinamica deslizante viene dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_S(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \Sigma_S. \quad (4-20)$$

Por (3-4) y (3-5), se tiene que la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_1(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx - ay \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \overline{S_1}, \quad (4-21)$$

con condición inicial (x_0, y_0) viene dada por

$$x(t) = x_0 \left[\frac{a}{\gamma} \sin(t\gamma) + \cos(t\gamma) \right] + \frac{by_0}{\gamma} \sin(t\gamma),$$

$$y(t) = \frac{cx_0}{\gamma} \sin(t\gamma) + y_0 \left[\cos(t\gamma) - \frac{a}{\gamma} \sin(t\gamma) \right],$$

donde γ , definido en la ecuación (3-6), viene dado por $\gamma = \sqrt{-a^2 - bc}$.

Además, como $a \neq 0$, por el Teorema 3, las trayectorias del sistema (4-21) con condición inicial (x_0, y_0) son elipses con centro en el origen, donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo agudo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ si $\frac{a}{b+c} < 0$; $\pi/4 < \theta < \pi/2$ si $\frac{a}{b+c} > 0$ y

$\theta = \pi/4$ si $\frac{c}{b} = -1$. Las ecuaciones de dichas trayectorias en el plano xy vienen dadas por

$$-\frac{c}{b}x^2(t) + 2\frac{a}{b}x(t)y(t) + y^2(t) = \xi, \quad (4-22)$$

donde ξ , definida en la ecuación (3-16), viene dada por $\xi = x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2$.

La solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_2(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ L \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \overline{S_2}, \quad (4-23)$$

con $L < 0$ y condición inicial (x_0, y_0) viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{bh}{a} + \left(x_0 + \frac{bh}{a}\right) e^{at}, \\ y(t) &= Lt + y_0. \end{aligned}$$

Manipulando algebraicamente esta solución se obtiene

$$x(t) = -\frac{bh}{a} + \left(x_0 + \frac{bh}{a}\right) e^{\frac{a}{L}(y(t)-y_0)}.$$

Por tanto, las trayectorias del sistema (4-23) son funciones exponenciales si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó una línea recta vertical si $x_0 = -\frac{bh}{a}$.

La solución del sistema (4-20) con condición inicial (x_0, y_0) viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{bh}{a} + \left(x_0 + \frac{bh}{a}\right) e^{at}, \\ y(t) &= h. \end{aligned}$$

Por tanto, las trayectorias del sistema (4-20) son líneas rectas horizontales.

A continuación, se consideran los casos $a > 0$ y $a < 0$.

2. $a > 0$

Para este caso, $a > 0$, se determina los retratos de fase del sistema de Filippov para los diferentes valores de h : $h > 0$, $h = 0$ y $h < 0$.

2.1 $h > 0$

De (3-3) se tiene que $bc < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$, $c < 0$ y $b > 0$.

2.1.1 $c > 0$ y $b < 0$

Como $b < 0$ y $a > 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido levógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre el eje rotado x' , ya que $\frac{a}{b} < 0$.

Se consideran los siguientes casos para la condición inicial (x_0, y_0) en S_1 :

2.1.1.1 $\xi > -\frac{h^2\gamma^2}{c}$

En este caso, la trayectoria del sistema (4-21) comenzando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse y no corta a Σ , ya que la condición

$$\xi > -\frac{h^2\gamma^2}{c},$$

implica que

$$2\sqrt{\frac{2\mu\xi}{\mu(b-c) + \mu^2}} < 2\sqrt{\frac{-2h^2\mu\gamma^2}{c[\mu(b-c) + \mu^2]}},$$

donde

$$2\sqrt{\frac{2\mu\xi}{\mu(b-c) + \mu^2}}$$

es la longitud del eje mayor de la trayectoria, elipse, que inicia desde el punto (x_0, y_0) y

$$2\sqrt{\frac{-2h^2\mu\gamma^2}{c[\mu(b-c) + \mu^2]}},$$

es la longitud del eje mayor de la trayectoria, elipse, que inicia desde el punto tangente $(\frac{ah}{c}, h)$. El parámetro μ es definido en la ecuación (3-18) y viene dado por $\mu = \sqrt{4a^2 + (c+b)^2}$.

2.1.1.2 $\frac{bh^2\gamma^2}{a^2} < \xi \leq \frac{h^2\gamma^2}{c}$

En este caso, la trayectoria del sistema (4-21) comenzando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

el cual está entre el punto tangente visible, $(\frac{ah}{c}, h)$, y el pseudo-equilibrio inestable, $(-\frac{bh}{a}, h)$, donde el punto tangente está a la izquierda del pseudo-equilibrio, ya que $\frac{ah}{c} < -\frac{bh}{a}$.

Como

$$\sigma \left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right) \leq 0,$$

la trayectoria es forzada a permanecer sobre Σ y a *deslizarse* sobre ella, dicho movimiento deslizante es definido por (4-20). Como el pseudo-equilibrio es inestable, se tiene que la trayectoria continua evolucionando sobre Σ hasta que llega al punto $(\frac{ah}{c}, h)$. Dado que $(\frac{ah}{c}, h)$ es un punto tangente visible con respecto a F_1 y F_2 es transversal a la frontera de conmutación Σ , la trayectoria sale de Σ en $(\frac{ah}{c}, h)$ y continua evolucionando en S_1 en forma de elipse formándose un ciclo, además, por el Teorema 3, se tiene que la solución del sistema (4-21) con condición inicial

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{ah}{c}, h \right),$$

satisface la siguiente ecuación

$$-\frac{c}{b}x^2(t) + 2\frac{a}{b}x(t)y(t) + y^2(t) + \frac{h^2\gamma^2}{bc} = 0,$$

la cual describe a dicho ciclo en el plano xy .

2.1.1.3 $\xi = \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$

Como $a > 0$, por el Teorema 3, se tiene que la trayectoria del sistema (4-21) comenzando en (x_0, y_0) es una elipse cuya ecuación en el plano $x'y'$ viene dada por

$$\frac{(x')^2}{2\mu\xi(\mu(b-c) + 4a|a| \pm (c+b)|c+b|)^{-1}} + \frac{(y')^2}{2\mu\xi(\mu(b-c) - 4a|a| + (c+b)|c+b|)^{-1}} = 1. \quad (4-24)$$

Como

$$\xi = \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}, \quad (4-25)$$

de (4-24) se tiene que

$$\frac{(x')^2}{2bh^2a^{-2}\gamma^2\mu((\mu(b-c) + 4a|a| \pm (c+b)|c+b|)^{-1})} + \frac{(y')^2}{2bh^2a^{-2}\gamma^2\mu((\mu(b-c) - 4a|a| + (c+b)|c+b|)^{-1})} = 1.$$

Esta última ecuación representa la trayectoria del sistema (4-21) iniciando en el pseudo-equilibrio $(-\frac{bh}{a}, h)$, por tanto, la trayectoria del sistema de Filippov que comienza en el punto $(x_0, y_0) \in S_1$, el cual satisface la condición (4-25), evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el pseudo-equilibrio inestable, $(-\frac{bh}{a}, h)$, al ser este un equilibrio del sistema (4-20), la trayectoria permanece en este punto y no se desliza sobre Σ .

2.1.1.4 $\xi < \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$

En este caso, la trayectoria del sistema (4-21) comenzando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

el cual está a la derecha del pseudo-equilibrio inestable, $(-\frac{bh}{a}, h)$.

Como

$$\sigma \left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right) \leq 0,$$

la trayectoria del sistema es forzado a permanecer sobre Σ y a *deslizarse* sobre ella, dicho movimiento deslizante es definido por (4-20). Como el pseudo-equilibrio es inestable, se tienen que la trayectoria continua evolucionando hacia la derecha, sobre Σ_S , tendiendo a más infinito.

En las Figuras **4-9a**, **4-9b** y **4-9c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

2.1.2 $c < 0$ y $b > 0$

Como $b > 0$ y $a > 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido dextrógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre el eje rotado y' , ya que $\frac{a}{b} > 0$.

De forma análoga al caso 2.1.1, para cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , se tiene lo siguiente:

2.1.2.1 Si $\xi < -\frac{h^2\gamma^2}{c}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse y no corta a Σ .

2.1.2.2 Si $-\frac{h^2\gamma^2}{c} \leq \xi < \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

el cual está entre el pseudo-equilibrio, $(-\frac{bh}{a}, h)$, y el punto tangente, $(\frac{ah}{c}, h)$; luego, la trayectoria entra en Σ y se desliza sobre ella hasta llegar al punto tangente visible, $(\frac{ah}{c}, h)$, después entra a la región S_1 y evoluciona en forma de elipse y llega nuevamente al punto tangente y continua evolucionando en forma de elipse.

2.1.2.3 Si $\xi = \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el pseudo-equilibrio inestable, $(-\frac{bh}{a}, h)$, al

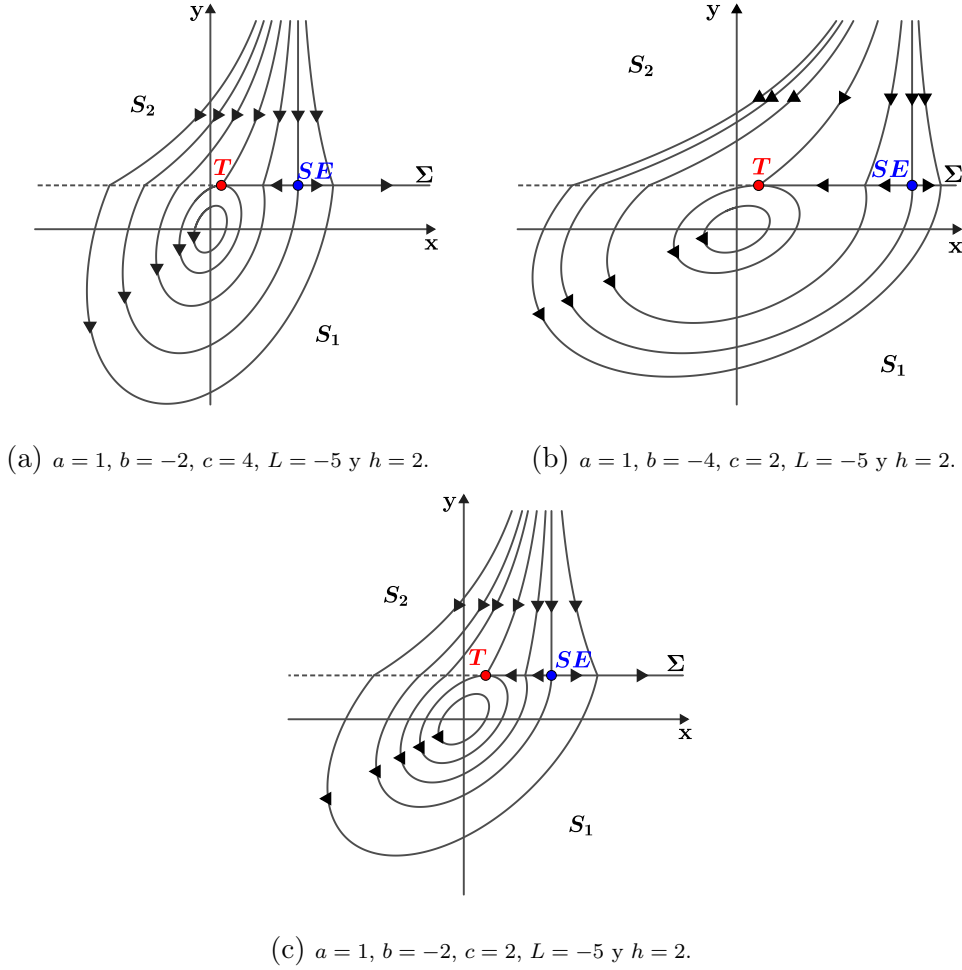


Figura 4-9: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a > 0, b < 0, c > 0$ y $h > 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por encima del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado x' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible (T) el cual se representa por un punto rojo y un pseudo-equilibrio (SE) inestable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

ser este un equilibrio del sistema (4-20) la trayectoria permanece en dicho punto y no se desliza sobre Σ .

2.1.2.4 Si $\xi > \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

el cual está a la izquierda del pseudo-equilibrio inestable, $(-\frac{bh}{a}, h)$; luego, la trayectoria entra en Σ y se desliza sobre ella, este deslizamiento continua hacia la izquierda tendiendo a menos infinito.

En las Figuras **4-10a**, **4-10b** y **4-10c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

2.2 $h = 0$

De (3-3) se tiene que $bc < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$ ó $c < 0$ y $b > 0$.

2.2.1 $c > 0$ y $b < 0$

Como $b < 0$ y $a > 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido levógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre el eje rotado x' , ya que $\frac{a}{b} < 0$. Como la frontera de conmutación, Σ , está sobre el eje x y las trayectorias del sistema (4-21) son elipses centradas en el origen, se tiene que para cualquier trayectoria iniciando en S_1 , en (x_0, y_0) , evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\sqrt{\frac{-\xi}{c}}, 0 \right),$$

el cual está a la derecha del equilibrio de frontera, $(0, 0)$.

Como

$$\sigma \left(\sqrt{\frac{-\xi}{c}}, 0 \right) \leq 0,$$

la trayectoria es forzada a permanecer sobre Σ y a deslizarse sobre ella, dicho movimiento deslizante es definido por (4-20). Como el equilibrio de frontera es inestable, se tienen que la trayectoria continua evolucionando hacia la derecha, sobre Σ , tendiendo a más infinito.

En las Figuras **4-11a**, **4-11b** y **4-11c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

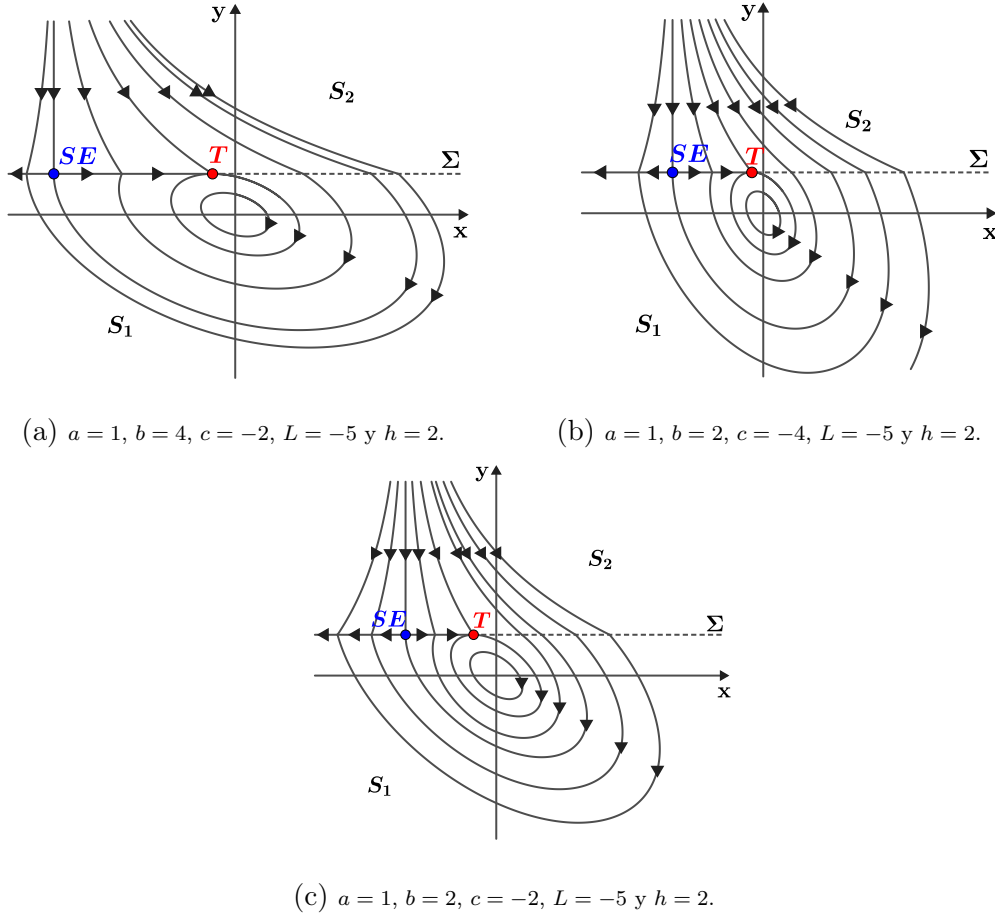


Figura 4-10: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a > 0, b > 0, c < 0$ y $h > 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por encima del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado y' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible (T) el cual se representa por un punto rojo y un pseudo-equilibrio (SE) inestable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

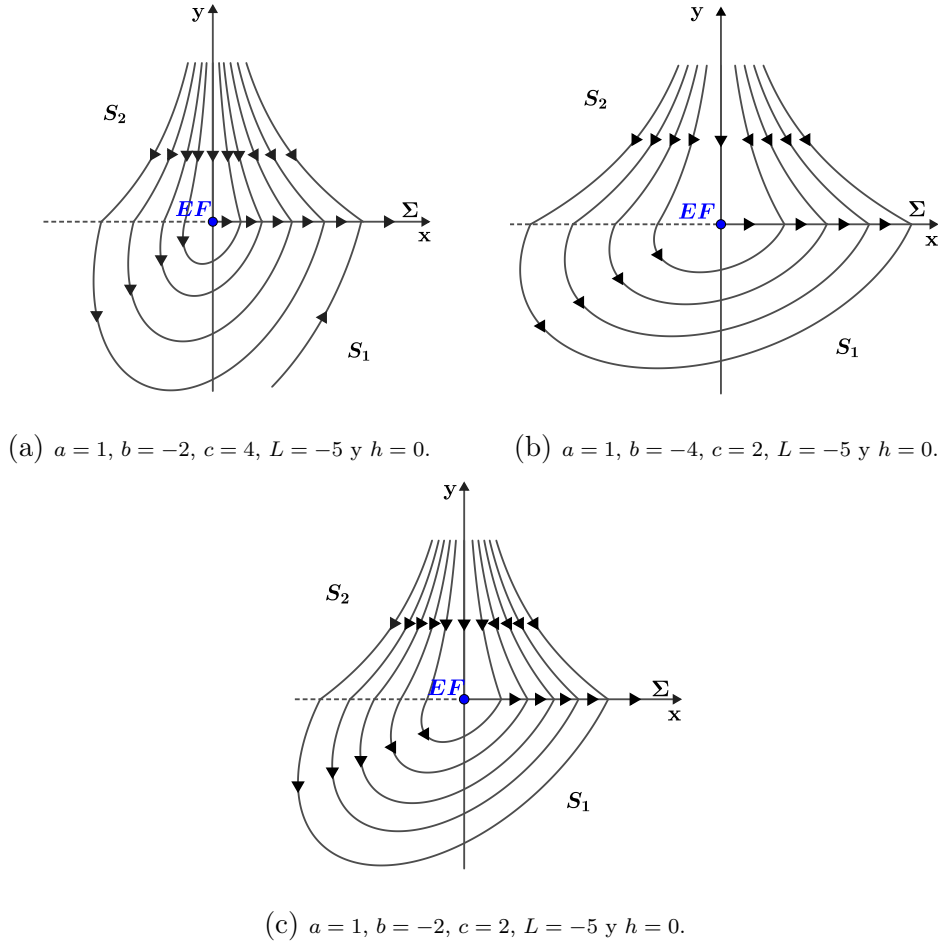


Figura 4-11: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a > 0, b < 0, c > 0$ y $h = 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra sobre el eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado x' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq 0$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = 0$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un equilibrio de frontera (EF) inestable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

2.2.2 $c < 0$ y $b > 0$

Como $b > 0$ y $a > 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido dextrógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre eje el rotado y' , ya que $\frac{a}{b} > 0$.

De forma análoga al caso 2.2.1, se tiene que cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(-\sqrt{\frac{-\xi}{c}}, 0\right)$$

el cual está a la izquierda del equilibrio de frontera inestable, $(0, 0)$; luego, la trayectoria continua sobre Σ y se desliza hacia la izquierda tendiendo a menos infinito.

En las Figuras **4-12a**, **4-12b** y **4-12c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

2.3 $h < 0$

De (3-3) se tiene que $bc < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$ ó $c < 0$ y $b > 0$.

2.3.1 $c > 0$ y $b < 0$

Como $b < 0$ y $a > 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido levógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre el eje rotado x' , ya que $\frac{a}{b} < 0$.

De forma análoga al caso 1.3.1, se tiene que cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h\right),$$

el cual está a la derecha del punto tangente invisible, $(\frac{ah}{c}, h)$; luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la derecha, tendiendo a más infinito.

En las Figuras **4-13a**, **4-13b** y **4-13c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

2.3.2 $c < 0$ y $b > 0$

Como $b > 0$ y $a > 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido dextrógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre eje rotado y' , ya que $\frac{a}{b} > 0$.

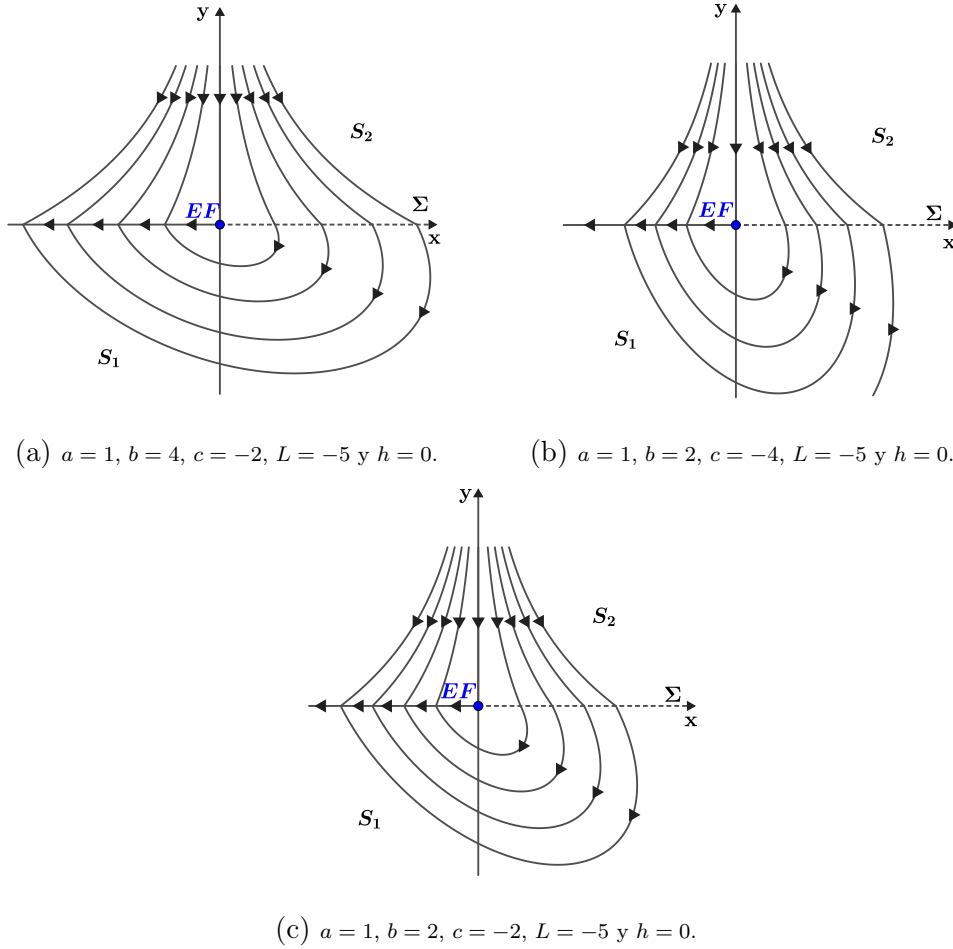


Figura 4-12: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ y $h = 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra sobre el eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado y' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq 0$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = 0$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un equilibrio de frontera (EF) inestable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

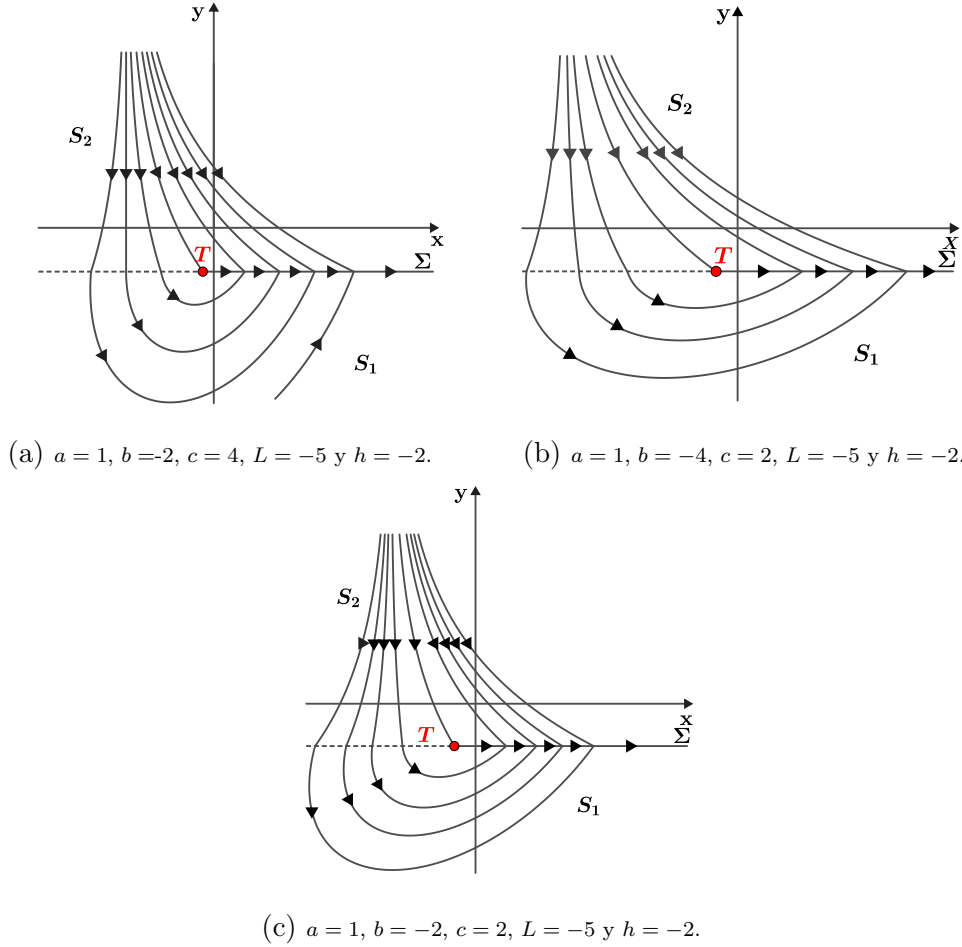


Figura 4-13: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a > 0, b < 0, c > 0$ y $h < 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por debajo del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado x' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente invisible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

De forma análoga al caso 1.3.1, se tiene que cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

el cual está a la izquierda del punto tangente invisible, $(\frac{ah}{c}, h)$; luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la izquierda, tendiendo a menos infinito.

En las Figuras 4-14a, 4-14b y 4-14c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

3. $a < 0$

Para este caso, $a < 0$, se determina los retratos de fase del sistema de Filippov para los diferentes valores de h : $h > 0$, $h = 0$ y $h < 0$.

3.1 $h > 0$

De (3-3) se tiene que $bc < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$, $c < 0$ y $b > 0$.

3.1.1 $c > 0$ y $b < 0$

Como $b < 0$ y $a < 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido levógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre el eje rotado y' , ya que $\frac{a}{b} > 0$.

Se consideran los siguientes casos para la condición inicial (x_0, y_0) en S_1 :

3.1.1.1 $\xi > -\frac{h^2\gamma^2}{c}$

Análogamente al caso 2.1.1.1, se tiene que la trayectoria del sistema (4-21) comenzando (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse y no corta a Σ .

3.1.1.2 $\xi \leq -\frac{h^2\gamma^2}{c}$

Análogamente al caso 1.1.1.b, se tiene que la trayectoria del sistema (4-21) comenzando (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse hasta corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

luego, la trayectoria entra a Σ y se desliza sobre ella, hacia la izquierda, hasta llegar al punto tangente visible, $(\frac{ah}{c}, h)$, después entra a la región S_1 , evoluciona en forma de elipse, llega nuevamente al punto tangente y continua evolucionando en forma de elipse.

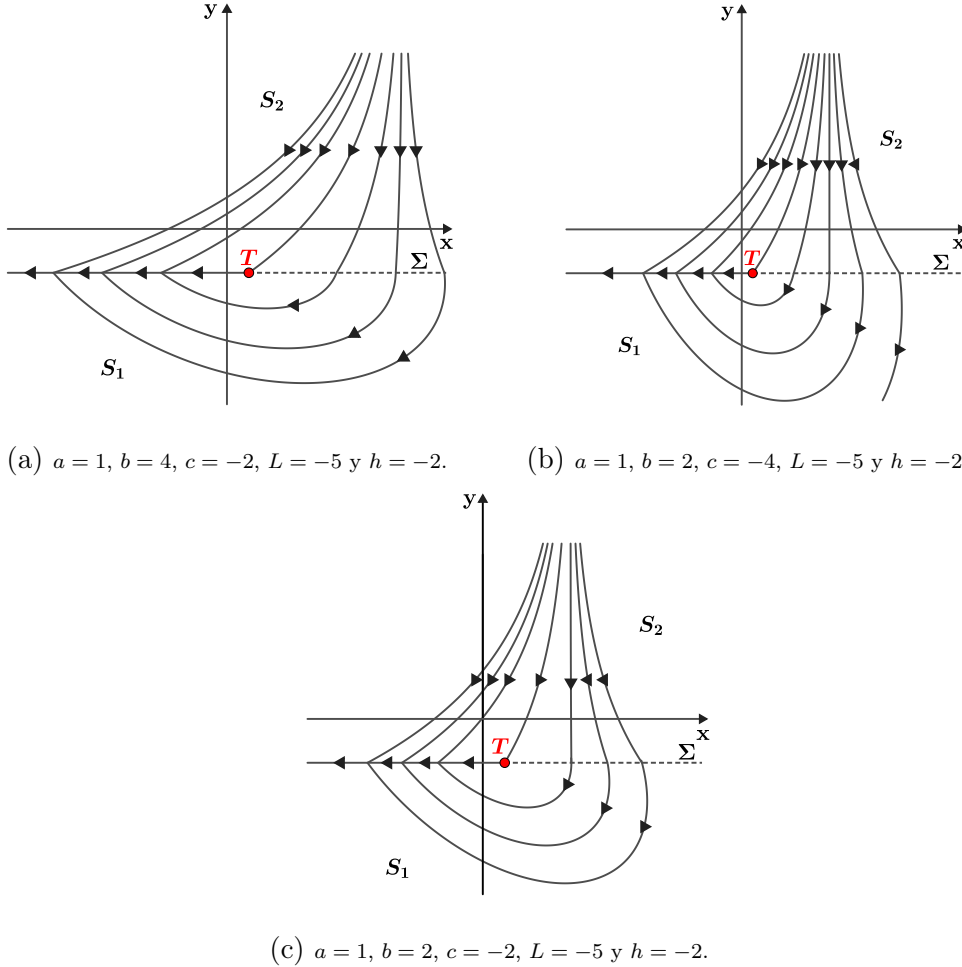


Figura 4-14: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a > 0, b > 0, c < 0$ y $h < 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por debajo del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado y' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente invisible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

En las Figuras **4-15a**, **4-15b** y **4-15c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

3.1.2 $c < 0$ y $b > 0$

Como $b > 0$ y $a < 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido dextrógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre el eje rotado x' , ya que $\frac{a}{b} < 0$.

De forma análoga al caso 3.1.1, para cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , se tiene lo siguiente:

3.1.2.1 Si $\xi < -\frac{h^2\gamma^2}{c}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse y no corta a Σ .

3.1.2.2 Si $\xi \geq -\frac{h^2\gamma^2}{c}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

luego, la trayectoria entra a Σ y se desliza sobre ella, hacia la derecha, hasta llegar al punto tangente visible, $(\frac{ah}{c}, h)$, después entra a la región S_1 , evoluciona en forma de elipse, llega nuevamente al punto tangente y continua evolucionando en forma de elipse.

En las Figuras **4-16a**, **4-16b** y **4-16c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

3.2 $h = 0$

De (3-3) se tiene que $bc < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$, $c < 0$ y $b > 0$.

3.2.1 $c > 0$ y $b < 0$

Como $b < 0$ y $a < 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido levógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre el eje rotado y' , ya que $\frac{a}{b} > 0$.

De forma análoga al caso 2.2.1, se tiene que cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(\sqrt{\frac{-\xi}{c}}, 0 \right),$$

luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la izquierda, tendiendo al equilibrio de frontera estable, $(0, 0)$.

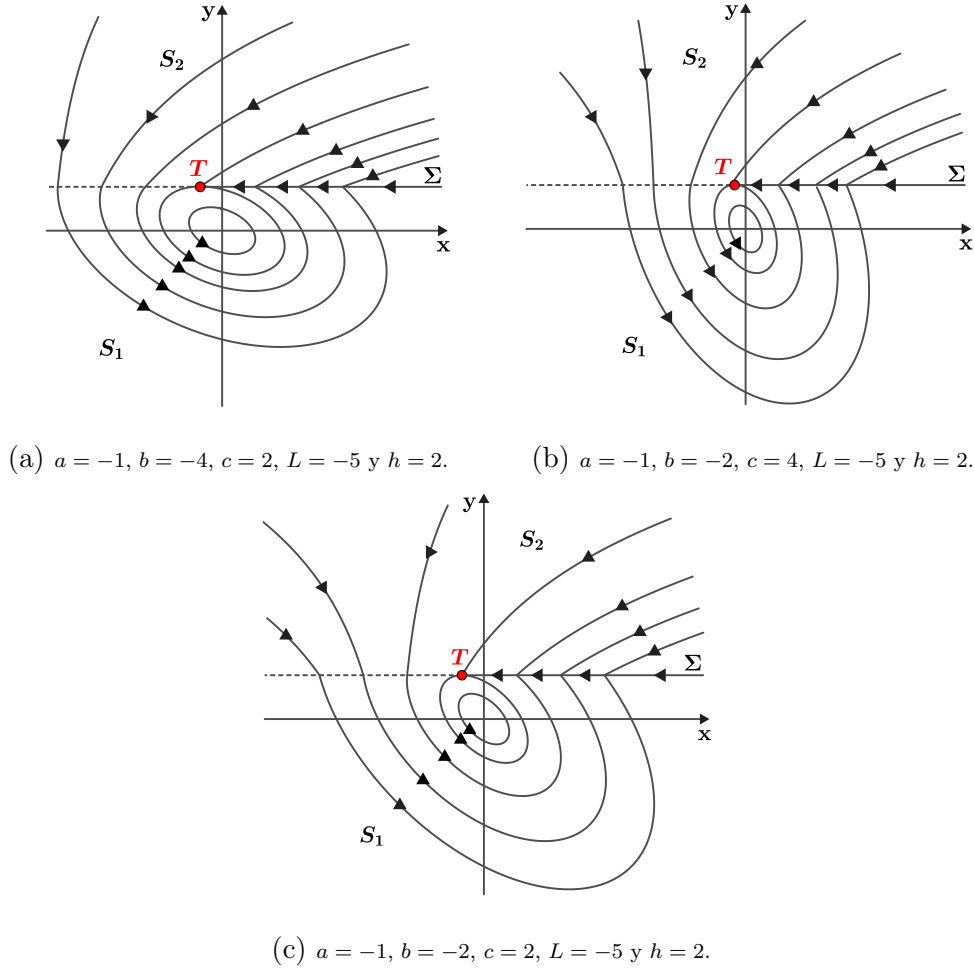


Figura 4-15: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a < 0, b < 0, c > 0$ y $h > 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por encima del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado y' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

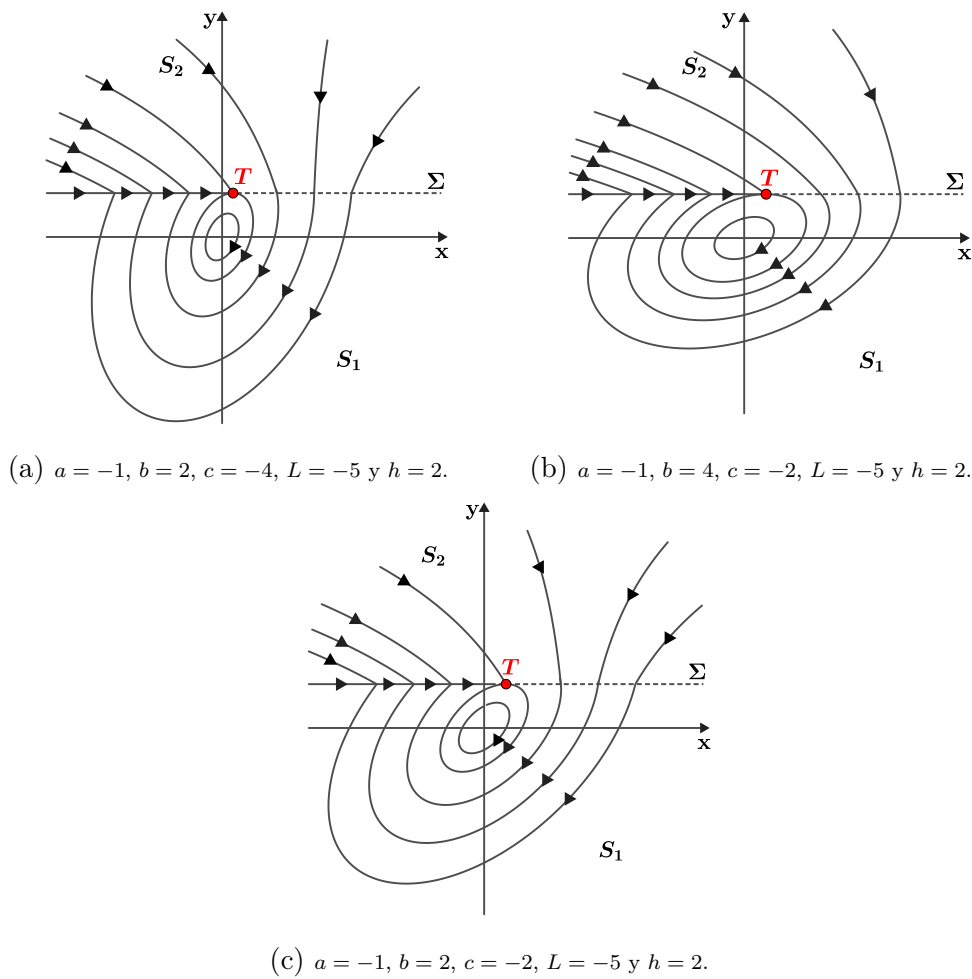


Figura 4-16: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a < 0, b > 0, c < 0$ y $h > 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por encima del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado x' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible (T) el cual se representa por un punto rojo en los retratos de fase.

En las Figuras 4-17a, 4-17b y 4-17c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

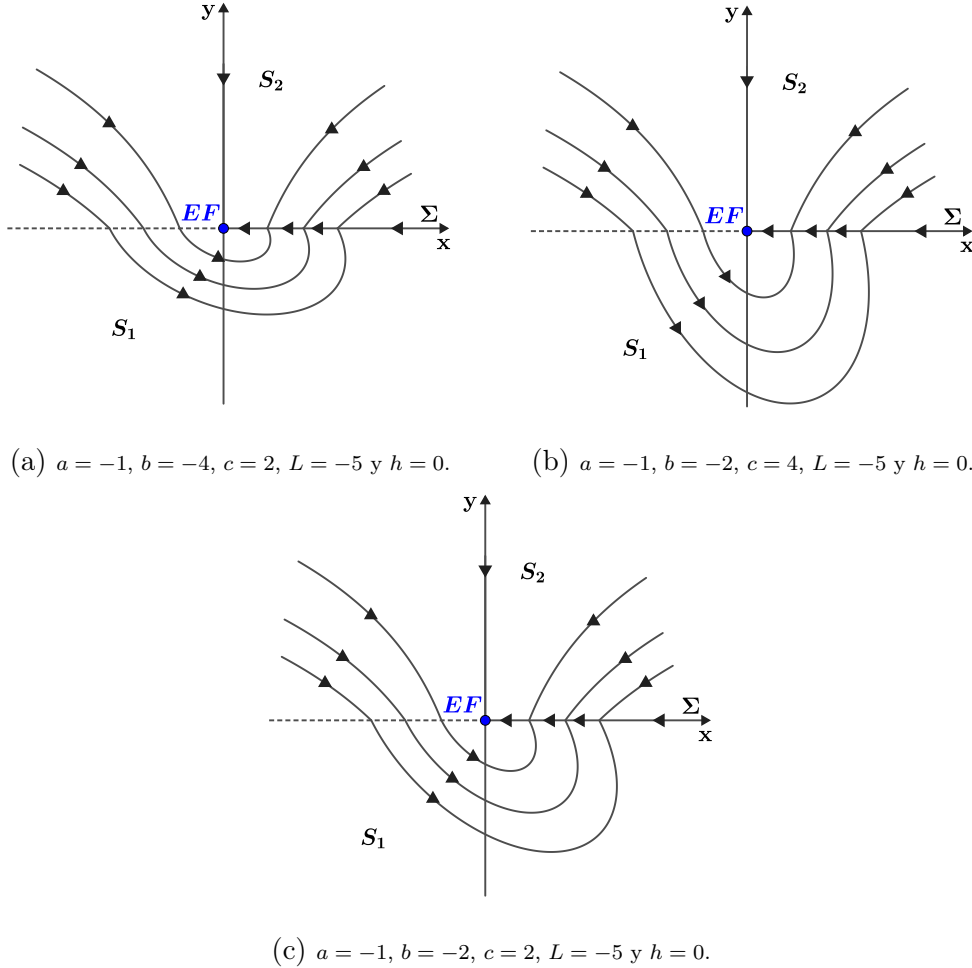


Figura 4-17: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$ y $h = 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra sobre el eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado y' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq 0$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = 0$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un equilibrio de frontera (EF) estable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

3.2.2 $c < 0$ y $b > 0$

Como $b > 0$ y $a < 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido dextrógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre eje el rotado x' , ya que $\frac{a}{b} < 0$.

De forma análoga al caso 2.2.1, se tiene que cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , corta a Σ en el punto

$$\left(-\sqrt{\frac{-\xi}{c}}, 0\right),$$

luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la derecha, tendiendo al equilibrio de frontera estable, $(0, 0)$.

En las Figuras 4-18a, 4-18b y 4-18c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} < 0$, $\frac{a}{b+c} > 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

3.3 $h < 0$

De (3-3) se tiene que $bc < 0$, luego c y b son de signos opuestos, por tanto, se consideran los siguientes casos: $c > 0$ y $b < 0$, $c < 0$ y $b > 0$.

3.3.1 $c > 0$ y $b < 0$

Como $b < 0$ y $a < 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido levógiro, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre eje el rotado y' , ya que $\frac{a}{b} > 0$.

Se consideran los siguientes casos para la condición inicial (x_0, y_0) en S_1 :

3.3.1.1 $\frac{bh^2\gamma^2}{a^2} < \xi \leq -\frac{h^2\gamma^2}{c}$

Análogamente al caso 2.1.1.2, se tiene que cualquier trayectoria del sistema (4-21) iniciando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h\right),$$

el cual está entre el punto tangente invisible, $(\frac{ah}{c}, h)$, y el pseudo-equilibrio estable, $(-\frac{bh}{a}, h)$; luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la derecha, tendiendo al pseudo-equilibrio estable.

3.3.1.2 $\xi = \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$

Análogamente al caso 2.1.1.3, la trayectoria del sistema (4-21) comenzando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el pseudo-equilibrio estable, $(-\frac{bh}{a}, h)$, al ser este un equilibrio del sistema (4-20) la trayectoria permanece en dicho punto y no se desliza sobre Σ .

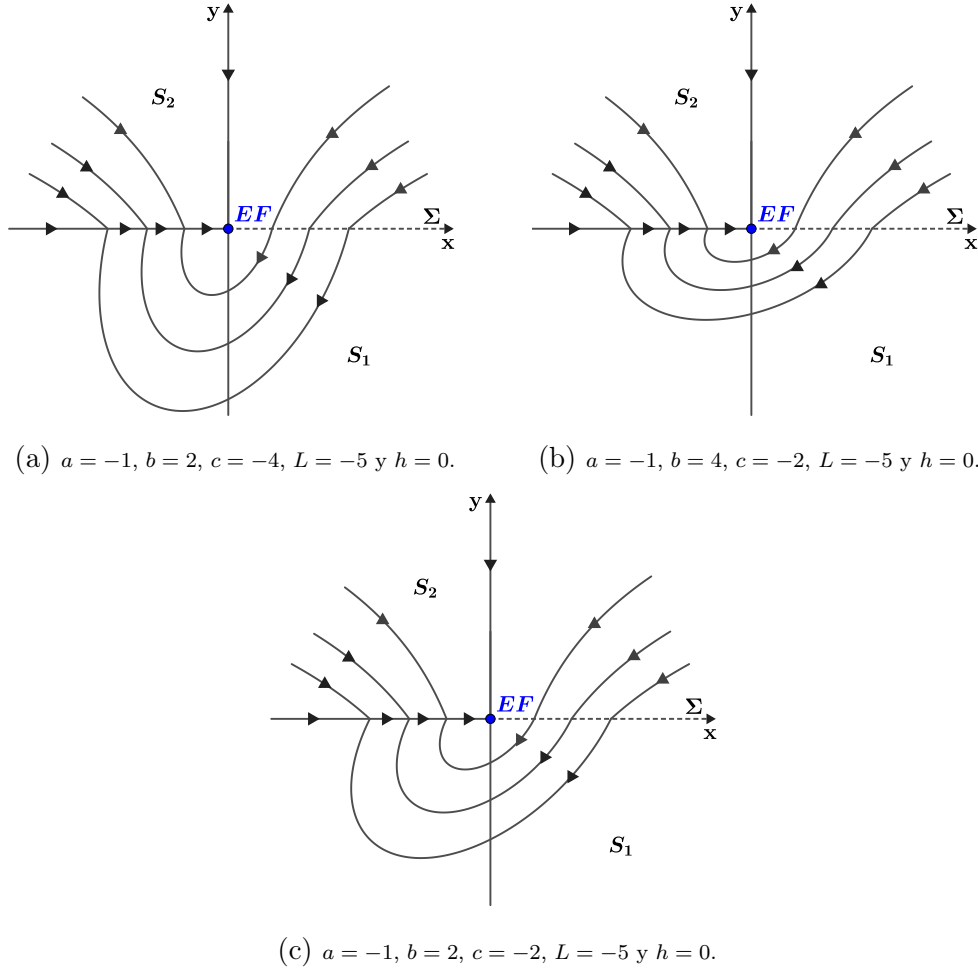


Figura 4-18: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ y $h = 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra sobre el eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado x' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq 0$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = 0$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un equilibrio de frontera (EF) estable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

3.3.1.3 $\xi < \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$

Análogamente al caso 2.1.1.4, la trayectoria del sistema (4-21) comenzando en (x_0, y_0) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la izquierda, tendiendo al pseudo-equilibrio estable, $(-\frac{bh}{a}, h)$.

En las Figuras **4-19a**, **4-19b** y **4-19c**, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} > 0$, $\frac{a}{b+c} < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

3.3.2 $c < 0$ y $b > 0$

Como $b > 0$ y $a < 0$, por el Teorema 3, se tiene que las trayectorias del sistema (4-21) giran en sentido dextrógiro y, además, el eje mayor de las trayectorias, elipses, está sobre eje el rotado x' , ya que $\frac{a}{b} < 0$.

De forma análoga al caso 3.3.1, para cualquier trayectoria del sistema (4-21) comenzando en S_1 , en (x_0, y_0) , se tiene lo siguiente:

3.3.2.1 Si $-\frac{h^2\gamma^2}{c} \leq \xi < \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

el cual está entre el pseudo-equilibrio estable, $(-\frac{bh}{a}, h)$, y el punto tangente invisible, $(\frac{ah}{c}, h)$; luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la izquierda, tendiendo al pseudo-equilibrio estable.

3.3.2.2 Si $\xi = \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el pseudo-equilibrio estable, $(-\frac{bh}{a}, h)$, al ser este un equilibrio del sistema (4-20) la trayectoria permanece en dicho punto y no se desliza sobre Σ .

3.3.2.3 Si $\xi > \frac{bh^2\gamma^2}{a^2}$, la trayectoria del sistema (4-21) evoluciona en forma de elipse hasta que corta a Σ en el punto

$$\left(\frac{ah + \sqrt{-h^2\gamma^2 - c\xi}}{c}, h \right),$$

el cual está a la izquierda del pseudo-equilibrio estable, $(-\frac{bh}{a}, h)$; luego, la trayectoria se desliza sobre Σ , hacia la derecha, tendiendo al pseudo-equilibrio estable.

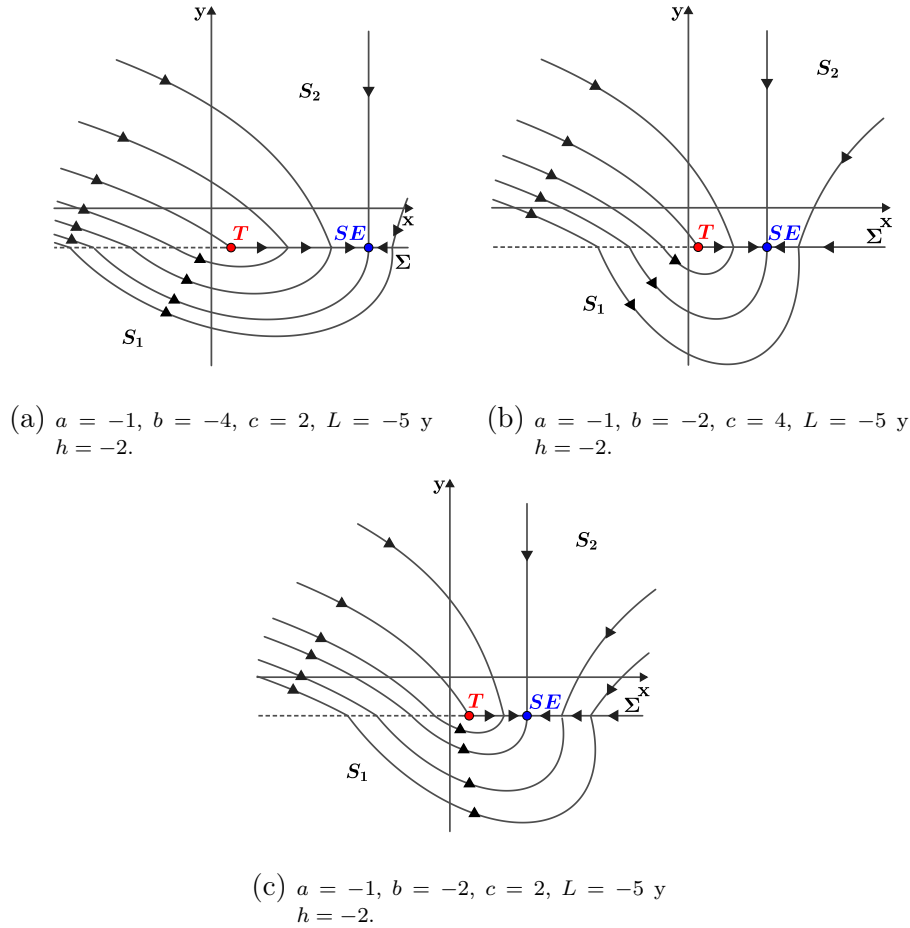


Figura 4-19: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a < 0, b < 0, c > 0$ y $h < 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por debajo del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido levógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado y' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente invisible (T) el cual se representa por un punto rojo y un pseudo-equilibrio (SE) estable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

En las Figuras 4-20a, 4-20b y 4-20c, se ilustran los retratos de fase para los casos $\frac{a}{b+c} < 0$, $\frac{a}{b+c} > 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, respectivamente.

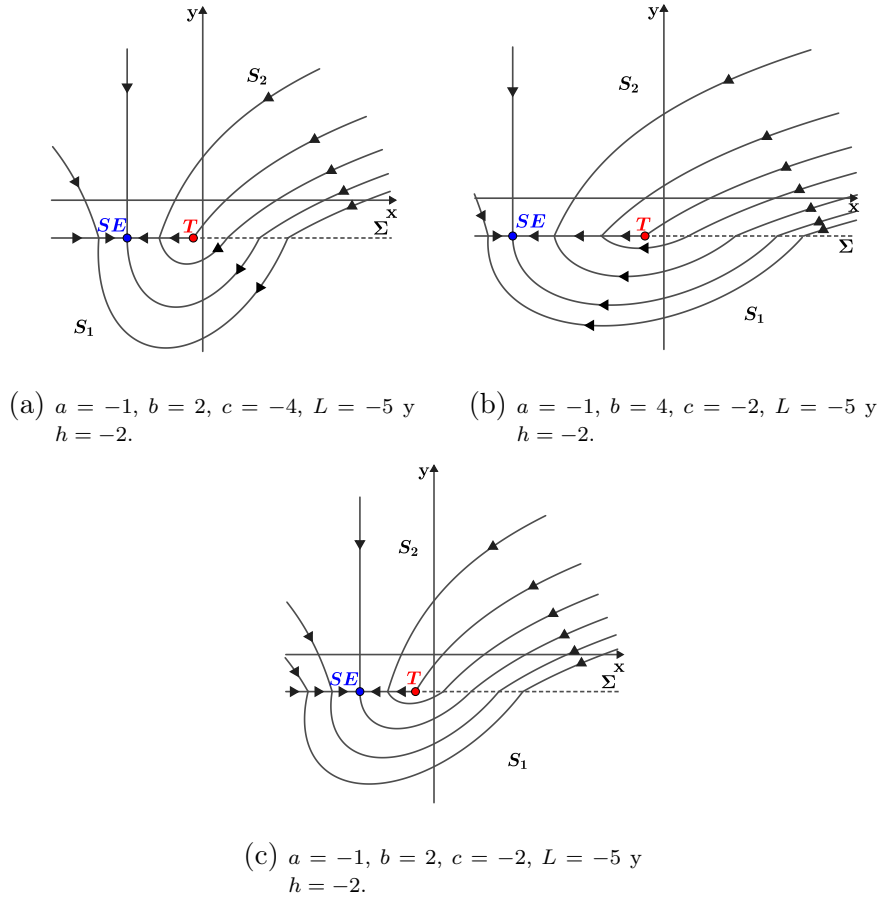


Figura 4-20: Retratos de fase del sistema de Filippov para el caso en que $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ y $h < 0$ tal que: (a) $\frac{a}{b+c} > 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $\pi/4 < \theta < \pi/2$; (b) $\frac{a}{b+c} < 0$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo θ tal que $0 < \theta < \pi/4$ y (c) $\frac{c}{b} = -1$, en este caso las trayectorias del sistema definido en S_1 evolucionan en forma de elipse donde sus ejes mayor y menor están rotados un ángulo $\pi/4$. En cualquiera de los casos (a), (b) y (c) la frontera de conmutación, Σ , se encuentra por debajo del eje x , las trayectorias del sistema S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y el eje mayor de las elipses está sobre el eje rotado x' , las trayectorias del sistema definido en S_2 evolucionan en forma exponencial si $x_0 \neq -\frac{bh}{a}$ ó son líneas rectas verticales si $x_0 = -\frac{bh}{a}$ y las trayectorias del sistema definido en Σ_S son líneas rectas horizontales. Además, el sistema de Filippov presenta un punto tangente invisible (T) el cual se representa por un punto rojo y un pseudo-equilibrio (SE) estable en Σ_S el cual se representa por un punto azul en los retratos de fase.

5 Análisis de bifurcaciones

Debido a que la dinámica del sistema Filippov, desde la frontera de conmutación hacia abajo, es independiente de la elección de F_{22} , la cual debe ser suave en $\overline{S_2}$ y negativa en Σ , y dado que el principal objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento del sistema con saturación en la región admisible, desde el marco teórico de los sistemas de Filippov, se analizará las bifurcaciones que presenta el sistema de Filippov, sin tener en cuenta el cambio cualitativo que pueda tener F_2 en S_2 al variar los parámetros de bifurcación. Para esto, se utiliza las figuras y las descripciones de los retratos de fase de la Sección 4.2.

En la Sección 4.2 se determinó los diferentes retratos de fase del sistema del Filippov (4-14) calculado en la Sección 4, se observó que estos varían según los valores que tomen los parámetros a , b , c y h . Además, se puede observar que cuando a y h son fijos y b y c varían, los retratos de fase no se modifican de forma significativa, ya que únicamente cambia el sentido de las trayectorias, el ángulo de rotación (en el caso de las elipses) y, además, los puntos deslizantes especiales siguen manteniendo su caracterización. Esto sugiere que al dejar a y h fijos y variar los parámetros c y b , los sistemas que se obtienen son topológicamente equivalentes, no hay un cambio significativo en sus retratos de fase. Por otro lado, si b y c son fijos y a y h varían de positivos a negativos o viceversa, se puede observar que los retratos de fase se modifican significativamente, ya que aparecen o desaparecen ciclos o puntos deslizantes especiales y estos últimos pueden cambiar de caracterización. Esto sugiere que al dejar b y c fijos y variar los parámetros a y h de positivos a negativos o viceversa, los sistemas que se obtienen no son topológicamente equivalentes, es decir, ocurre una bifurcación, entendiendo por bifurcación cualquier cambio cualitativo mayor en el comportamiento del sistema en respuesta a la variación de un parámetro.

A continuación, según los cálculos y figuras de la Sección 4.2, se describe y se muestran los diagramas de bifurcación del sistema de Filippov (4-14) calculado en la Sección 4. Para esto se consideran los siguientes casos con respecto a los valores que pueden tomar los parámetros b y c :

(a) $b < 0$ y $\frac{c}{b} < -1$

(b) $b < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$

(c) $b < 0$ y $\frac{c}{b} > -1$

(d) $b > 0$ y $\frac{c}{b} < -1$

(e) $b > 0$ y $\frac{c}{b} = -1$

(f) $b > 0$ y $\frac{c}{b} > -1$

En cada uno de estos casos se observa el mismo comportamiento en cuanto a las bifurcaciones que se presentan, ya que b y c no son parámetros de bifurcación. Por tanto, para realizar la descripción de los diagramas bifurcación, se supone que b y c son fijos y cumplen cualquiera de los casos anteriormente mencionados, mientras que para los valores que puede tomar a y h se consideran los siguientes casos: $h > 0$ fijo y a variando de positivo a negativo, $h = 0$ fijo y a variando de positivo a negativo, $h < 0$ fijo y a variando de positivo a negativo, $a > 0$ fijo y h variando de positivo a negativo, $a = 0$ fijo y h variando de positivo a negativo, $a < 0$ fijo y h variando de positivo a negativo, a y h variando de positivos a negativos y, finalmente, a variando de negativo a positivo y h variando de positivo a negativo.

(1) $h > 0$ fijo y a variando de positivo a negativo.

Como $h > 0$, se tiene que para $a > 0$ el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible en $(\frac{ah}{c}, h)$ y un pseudo-equilibrio inestable en $(-\frac{bh}{a}, h)$. A medida que el valor de a se aproxima a cero, el punto tangente se mueve hacia el punto $(0, h)$ y el pseudo-equilibrio se mueve hacia la derecha tendiendo a más infinito si $b < 0$ ó se mueve hacia izquierda tendiendo a menos infinito si $b > 0$. Cuando $a = 0$, el sistema de Filippov tiene un punto tangente visible en $(0, h)$ y el pseudo-equilibrio desaparece. Cuando $a < 0$, el sistema solamente presenta un punto tangente visible en $(\frac{ah}{c}, h)$. Por tanto, si $h > 0$ fijo y a varia de positivo a negativo o viceversa, el sistema presenta una bifurcación de codimensión uno y se tiene el siguiente conjunto de puntos de bifurcación

$$BF_1 = \{(a, h) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0 \wedge h > 0\}.$$

(2) $h = 0$ fijo y a variando de positivo a negativo.

Como $h = 0$, se tiene que para $a > 0$ el sistema de Filippov presenta un equilibrio de frontera inestable en el origen. Además, las trayectorias de la dinámica deslizante se alejan del equilibrio de frontera hacia más infinito si $b < 0$ ó hacia menos infinito si $b > 0$. Cuando $a = 0$, el sistema de Filippov mantiene el equilibrio de frontera en el origen y presenta una singularidad lineal (la parte positiva o negativa del eje x está formada por pseudo-equilibrios si $b < 0$ ó $b > 0$, respectivamente). Cuando $a < 0$, el sistema solamente presenta un equilibrio de frontera estable en el origen. Por tanto, si $h = 0$ fijo y a varia de positivo a negativo o viceversa, el sistema presenta una bifurcación de codimensión uno y se tiene que $(0, 0)$ es un punto de bifurcación en el plano ah .

(3) $h < 0$ fijo y a variando de positivo a negativo.

Si $h < 0$, se tiene que para $a \geq 0$ el sistema de Filippov presenta un punto tangente invisible en $(\frac{ah}{c}, h)$. Además, las trayectorias de la dinámica deslizante se alejan de este

punto y tienden a más infinito si $b < 0$ ó a menos infinito si $b > 0$. Cuando $a < 0$, el sistema sigue presentando un punto tangente invisible en $(\frac{ah}{c}, h)$ y, además, presenta un pseudo-equilibrio estable en $(-\frac{bh}{a}, h)$. Por tanto, si $h < 0$ fijo y a varia de positivo a negativo o viceversa, el sistema presenta una bifurcación de codimensión uno y se tiene el siguiente conjunto de puntos de bifurcación

$$BF_2 = \{(a, h) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0 \wedge h < 0\}.$$

(4) $a > 0$ fijo y h variando de positivo a negativo.

Como $a > 0$, se tiene que para $h > 0$ el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible en $(\frac{ah}{c}, h)$ y un pseudo-equilibrio inestable en $(-\frac{bh}{a}, h)$. Además, el sistema de Filippov presenta infinitos ciclos, elipses, cuyas ecuaciones en el plano xy vienen dadas por (4-22), donde la condición inicial (x_0, y_0) es tal que

$$x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2 \geq \frac{h^2(a^2 + bc)}{c}$$

si $b < 0$ ó

$$x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2 \leq \frac{h^2(a^2 + bc)}{c}$$

si $b > 0$. A medida que el valor de h se aproxima a cero, el punto tangente y el pseudo-equilibrio se aproximan el uno al otro y tienden hacia el origen $(0, 0)$. Cuando $h = 0$, el punto tangente y el pseudo-equilibrio colisionan en el origen y este se convierte en un equilibrio de frontera inestable, donde las trayectorias de la dinámica deslizante se alejan de este tendiendo hacia más infinito si $b < 0$ ó hacia menos infinito si $b > 0$. Además, no existen ciclos. Cuando $h < 0$, el sistema no presenta ciclos, solamente presenta un punto tangente invisible en $(\frac{ah}{c}, h)$ y las trayectorias de la dinámica deslizante se alejan de este y tienden a más infinito si $b < 0$ ó a menos infinito si $b > 0$. Por tanto, si $a > 0$ fijo y h varia de positivo a negativo o viceversa, el sistema presenta una bifurcación de codimensión uno y se tiene el siguiente conjunto de puntos de bifurcación

$$BF_3 = \{(a, h) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0 \wedge h = 0\}.$$

(5) $a = 0$ fijo y h variando de positivo a negativo.

Como $a = 0$, se tiene que para $h > 0$ el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible en $(0, h)$. Además, el sistema de Filippov presenta infinitos ciclos, elipses ó circunferencias, cuyas ecuaciones en el plano xy vienen dadas por (4-22), donde la condición inicial (x_0, y_0) es tal que $\sqrt{y_0^2 - \frac{c}{b}x_0^2} \leq h$. A medida que el valor de h se aproxima a cero, el punto tangente tiende al origen $(0, 0)$. Cuando $h = 0$, el sistema presenta un equilibrio de frontera en el origen $(0, 0)$, el sistema presenta una

singularidad lineal (la parte positiva o negativa del eje x está formada por pseudo-equilibrios si $b < 0$ ó $b > 0$, respectivamente) y el sistema no presenta ciclos. Cuando $h < 0$, el sistema no presenta ciclos, solamente presenta un punto tangente invisible en $(0, h)$ y las trayectorias de la dinámica deslizante se alejan de este y tiene a más infinito si $b < 0$ ó menos infinito si $b > 0$. Por tanto, si $a = 0$ fijo y h varia de positivo a negativo o viceversa, el sistema presenta una bifurcación de codimensión uno y se tiene que $(0, 0)$ es un punto de bifurcación en el plano ah .

(6) $a < 0$ fijo y h variando de positivo a negativo.

Como $a < 0$, se tiene que para $h > 0$ el sistema presenta un punto tangente visible en $(\frac{ah}{c}, h)$. Además, el sistema de Filippov presenta infinitos ciclos, elipses, cuyas ecuaciones en el plano xy vienen dadas por (4-22), donde la condición inicial (x_0, y_0) es tal que

$$x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2 \geq \frac{h^2(a^2 + bc)}{c}$$

si $b < 0$ ó

$$x_0[2ay_0 - cx_0] + by_0^2 \leq \frac{h^2(a^2 + bc)}{c}$$

si $b > 0$. A medida que el valor de h se aproxima a cero, el punto tangente tiende al origen $(0, 0)$. Cuando $h = 0$, el sistema no presenta ciclos, solamente presenta un equilibrio de frontera estable en el origen $(0, 0)$ y las trayectorias de la dinámica deslizante se dirigen hacia este punto por la derecha si $b < 0$ o por la izquierda si $b > 0$. Cuando $h < 0$, el sistema presenta un punto tangente invisible $(\frac{ah}{c}, h)$ y un pseudo-equilibrio estable en $(-\frac{bh}{a}, h)$. Además, el sistema no presenta ciclos. Por tanto, si $a < 0$ fijo y h varia de positivo a negativo o viceversa, el sistema presenta una bifurcación de codimensión uno y se tiene el siguiente conjunto de puntos de bifurcación

$$BF_4 = \{(a, h) \in \mathbb{R}^2 \mid a < 0 \wedge h = 0\}.$$

(7) a y h variando de positivos a negativos.

Si $a > 0$ y $h > 0$, se tiene que el sistema de Filippov presenta un punto tangente visible en $(\frac{ah}{c}, h)$, un pseudo-equilibrio inestable en $(-\frac{bh}{a}, h)$ y, además, el sistema de Filippov presenta infinitos ciclos, elipses, cuyas ecuaciones en el plano xy vienen dadas por (4-22). Cuando $a = 0$ y $h = 0$ el sistema de Filippov presenta un equilibrio de frontera en el origen, $(0, 0)$, el sistema presenta una singularidad lineal (la parte positiva o negativa del eje x está formada por pseudo-equilibrios si $b < 0$ ó $b > 0$, respectivamente) y el sistema no presenta ciclos. Cuando $a < 0$ y $h < 0$, el sistema presenta un punto tangente invisible en $(\frac{ah}{c}, h)$, un pseudo-equilibrio estable en $(-\frac{bh}{a}, h)$ y el sistema no presenta ciclos. Por tanto, si a y h varían de positivos a negativos o viceversa, el sistema presenta una bifurcación de codimensión dos y se tiene que $(0, 0)$ es un punto de bifurcación en el plano ah .

(8) a variando de negativo a positivo y h variando de positivo a negativo.

Si $a < 0$ y $h > 0$, el sistema presenta un punto tangente visible en $(\frac{ah}{c}, h)$ y el sistema presenta infinitos ciclos, elipses, cuya ecuaciones en el plano xy vienen dadas por (4-22). A medida que a y h se aproximan a cero, el punto tangente tiende al origen, $(0, 0)$. Cuando $a = 0$ y $h = 0$ el sistema de Filippov presenta un equilibrio de frontera en el origen, $(0, 0)$, el sistema presenta una singularidad lineal (la parte positiva o negativa del eje x está formada por pseudo-equilibrios si $b < 0$ ó $b > 0$, respectivamente) y el sistema no presenta ciclos. Cuando $a > 0$ y $h < 0$, el sistema no presenta ciclos, solamente presenta un punto tangente invisible en $(\frac{ah}{c}, h)$ y las trayectorias de la dinámica deslizante se alejan de este y tienden a más infinito si $b < 0$ ó a menos infinito si $b > 0$. Por tanto, si a varía de negativo a positivo y h varía de positivo a negativo, el sistema presenta una bifurcación de codimensión dos y se tiene que $(0, 0)$ es un punto de bifurcación en el plano ah .

De los casos (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8) se tiene que las curvas de bifurcación en el plano ah vienen dadas por los ejes a y h .

A continuación, para cada uno de los casos (a), (b), (c), (d), (e) y (f), se ilustra su respectivo diagrama de bifurcación. En estos se puede apreciar las bifurcaciones de codimensión uno y dos al variar los parámetros de bifurcación a y h .

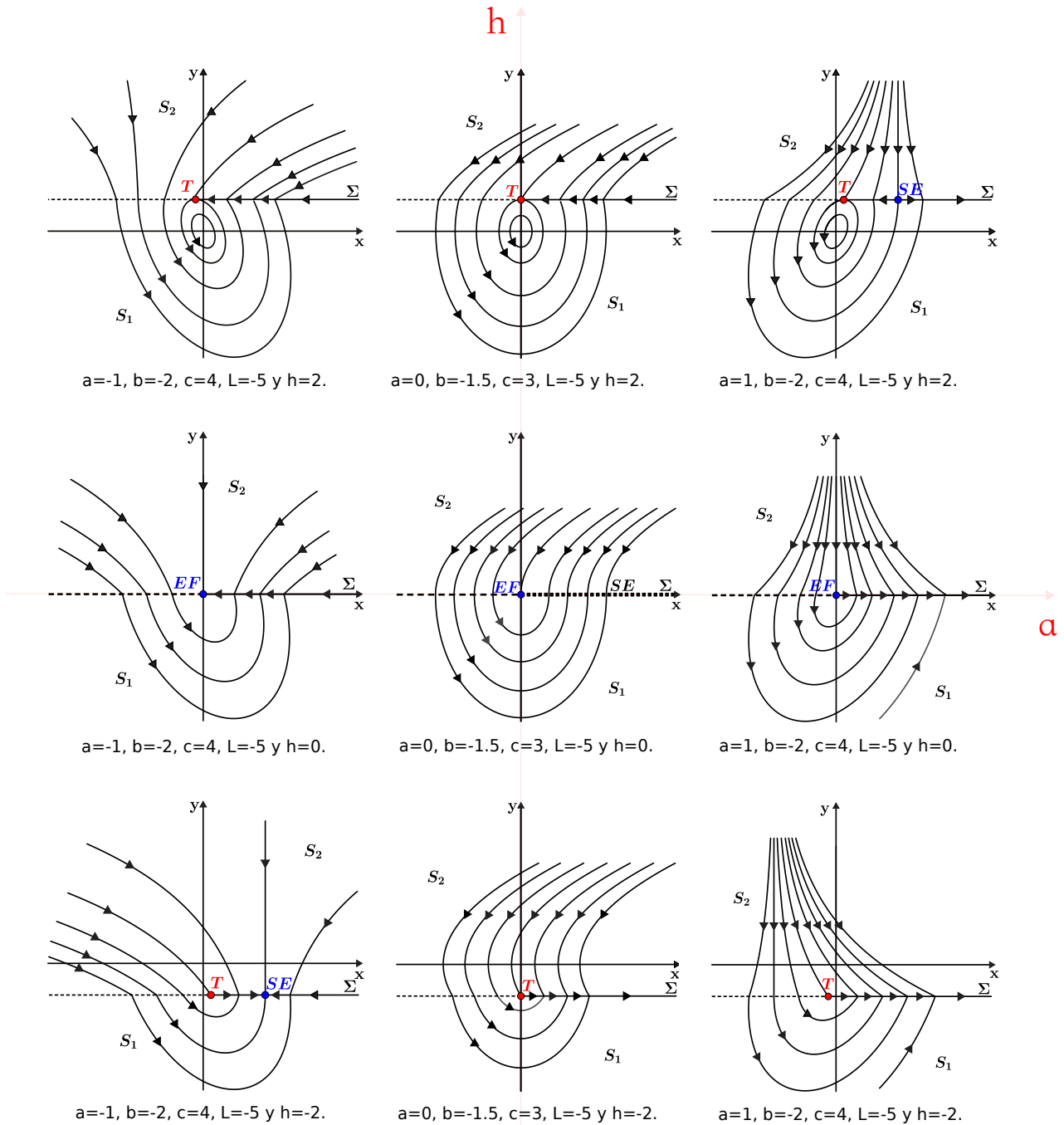


Figura 5-1: Diagrama de bifurcación para el caso en que $b < 0$ y $\frac{c}{b} < -1$. Las curvas de bifurcación vienen dadas por los ejes a y h , los puntos rojos representan puntos tangentes (T) y los puntos azules representan pseudo-equilibrios (SE) ó equilibrios de frontera (EF); los cambios que presenta el sistema al variar los parámetros a ó h mientras b y c están fijos se describen en los casos (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8). Como $b < 0$ y $\frac{c}{b} < -1$, las trayectorias en S_1 evolucionan en sentido levógiro y en forma de elipse.

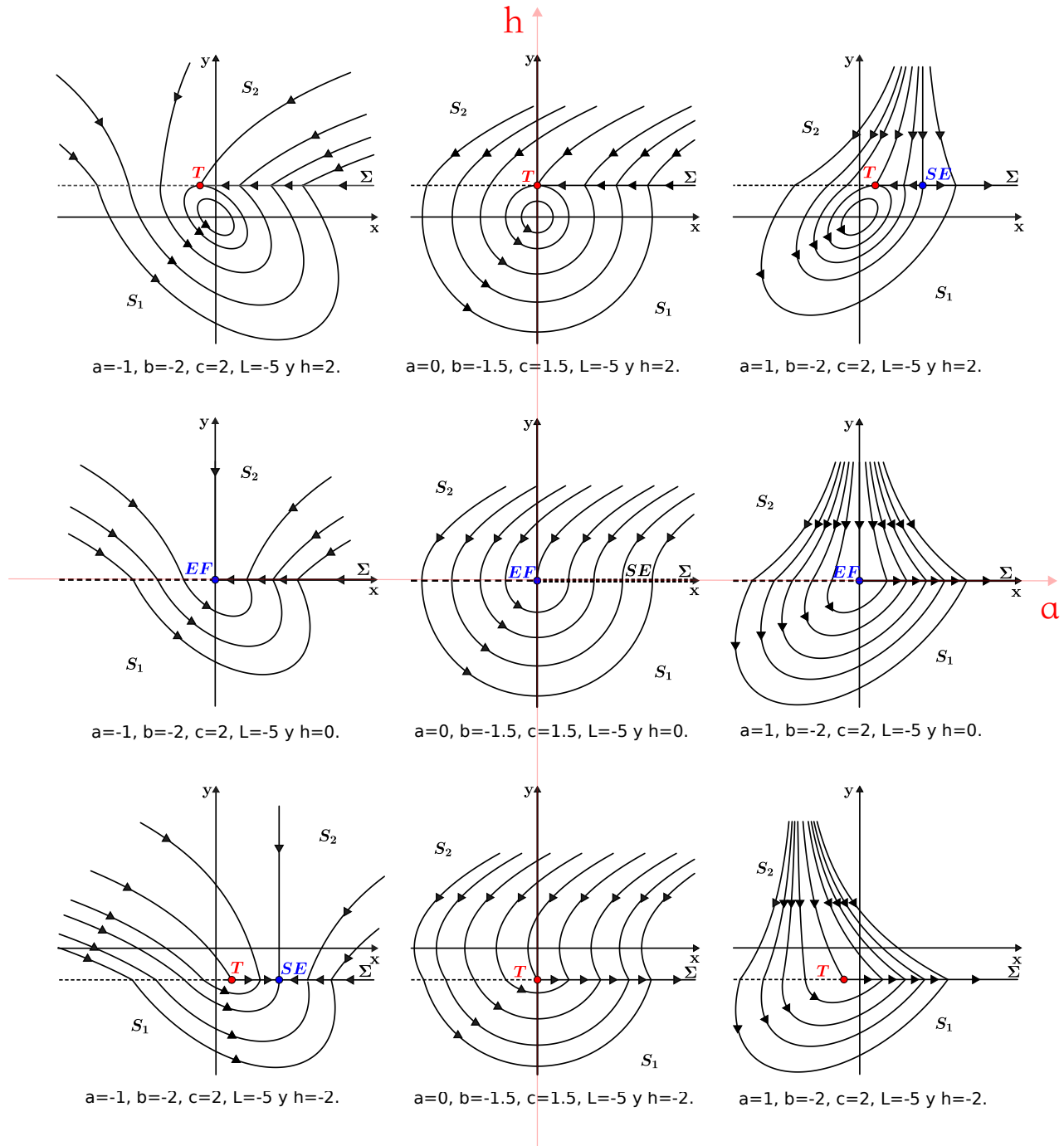


Figura 5-2: Diagrama de bifurcación para el caso en que $b < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$. Las curvas de bifurcación vienen dadas por los ejes a y h , los puntos rojos representan puntos tangentes (T) y los puntos azules representan pseudo-equilibrios (SE) ó equilibrios de frontera (EF); los cambios que presenta el sistema al variar los parámetros a ó h mientras b y c están fijos se describen en los casos (1), (2), (3), (4), (6), (7) y (8). Como $b < 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, las trayectorias en S_1 evolucionan en sentido levógiro y en forma de elipse cuando $a \neq 0$ ó en forma de circunferencia cuando $a = 0$.

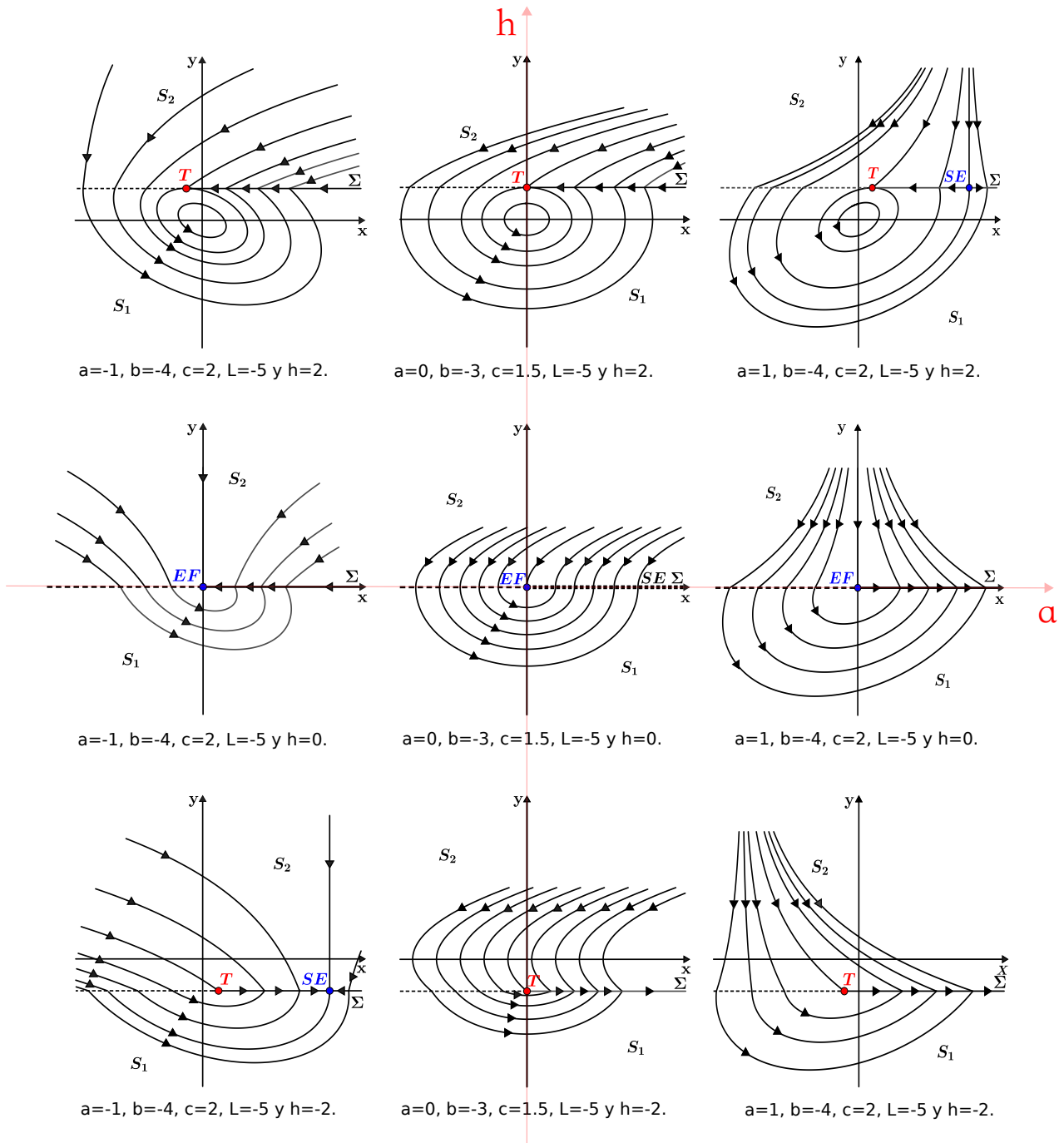


Figura 5-3: Diagrama de bifurcación para el caso en que $b < 0$ y $\frac{c}{b} > -1$. Las curvas de bifurcación vienen dadas por los ejes a y h , los puntos rojos representan puntos tangentes (T) y los puntos azules representan pseudo-equilibrios (SE) ó equilibrios de frontera (EF); los cambios que presenta el sistema al variar los parámetros a ó h mientras b y c están fijos se describen en los casos (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8). Como $b < 0$ y $\frac{c}{b} > -1$, las trayectorias en S_1 evolucionan en sentido levógiro y en forma de elipse.

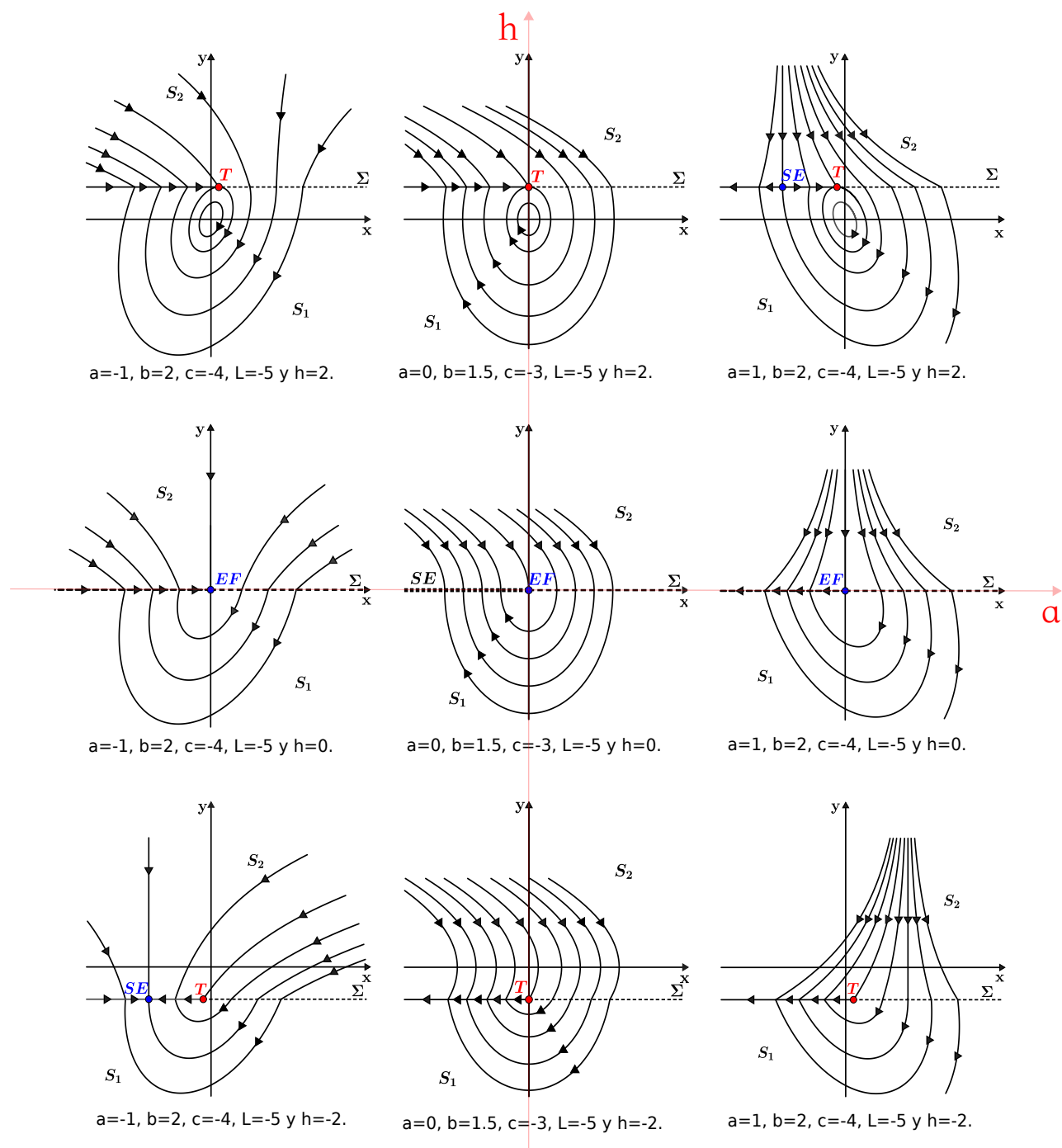


Figura 5-4: Diagrama de bifurcación para el caso en que $b > 0$ y $\frac{c}{b} < -1$. Las curvas de bifurcación vienen dadas por los ejes a y h , los puntos rojos representan puntos tangentes (T) y los puntos azules representan pseudo-equilibrios (SE) ó equilibrios de frontera (EF); los cambios que presenta el sistema al variar los parámetros a ó h mientras b y c están fijos se describen en los casos (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8). Como $b > 0$ y $\frac{c}{b} < -1$, las trayectorias en S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y en forma de elipse.

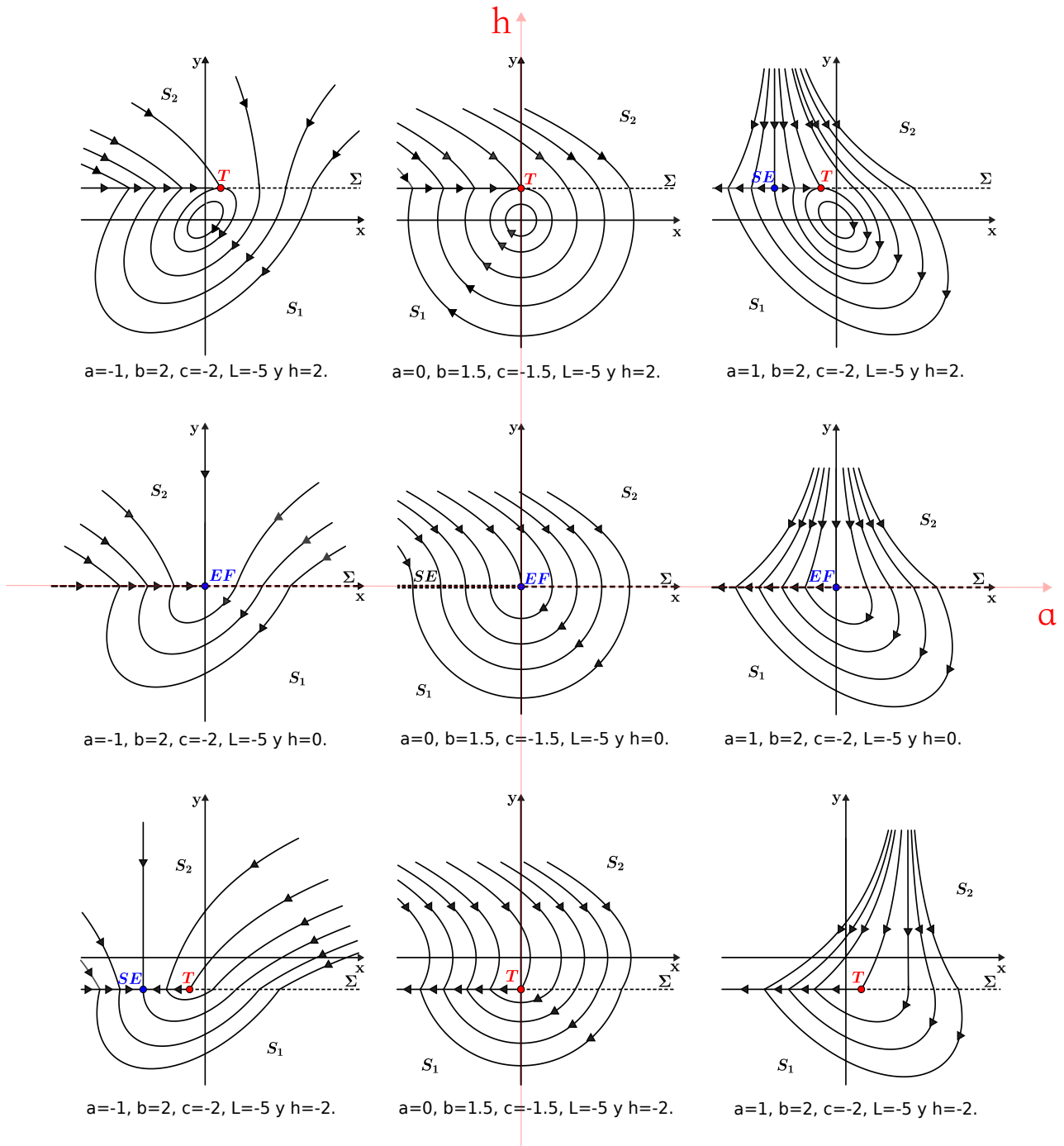


Figura 5-5: Diagrama de bifurcación para el caso en que $b > 0$ y $\frac{c}{b} = -1$. Las curvas de bifurcación vienen dadas por los ejes a y h , los puntos rojos representan puntos tangentes (T) y los puntos azules representan pseudo-equilibrios (SE) ó equilibrios de frontera (EF); los cambios que presenta el sistema al variar los parámetros a ó h mientras b y c están fijos se describen en los casos (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8). Como $b > 0$ y $\frac{c}{b} = -1$, las trayectorias en S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y en forma de elipse cuando $a \neq 0$ ó en forma de circunferencia cuando $a = 0$.

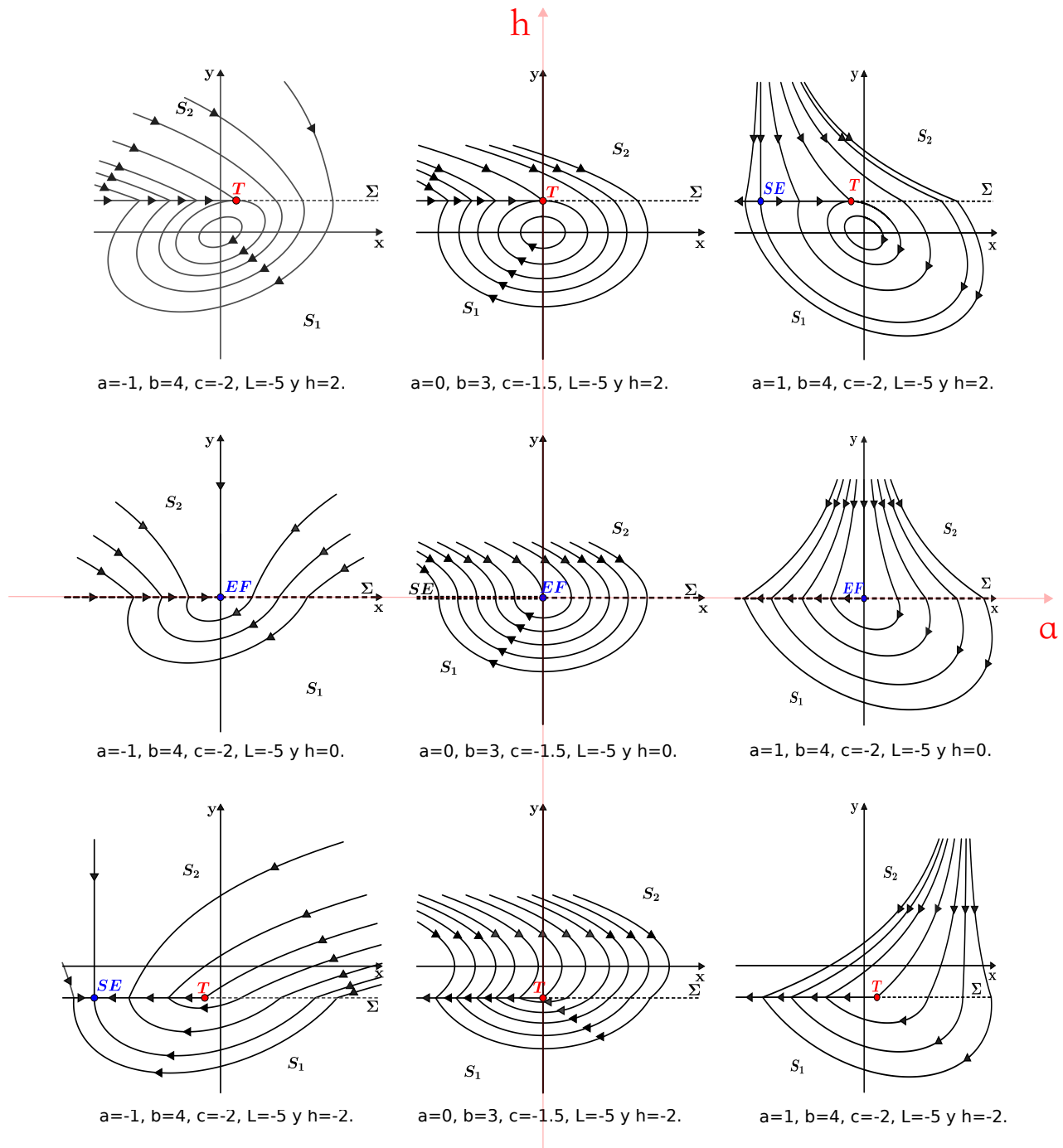


Figura 5-6: Diagrama de bifurcación para el caso en que $b > 0$ y $\frac{c}{b} > -1$. Las curvas de bifurcación vienen dadas por los ejes a y h , los puntos rojos representan puntos tangentes (T) y los puntos azules representan pseudo-equilibrios (SE) ó equilibrios de frontera (EF); los cambios que presenta el sistema al variar los parámetros a ó h mientras b y c están fijos se describen en los casos (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8). Como $b > 0$ y $\frac{c}{b} > -1$, las trayectorias en S_1 evolucionan en sentido dextrógiro y en forma de elipse.

6 Resultados y trabajo a futuro

6.1. Resultados

1. Un primer resultado es el Teorema 3, el cual describe las trayectorias de los sistemas lineales dos-dimensionales con centro en el origen. Según este teorema, de acuerdo a los valores que tomen las entradas de la matriz de coeficientes del sistema lineal, dichas trayectorias pueden evolucionar en sentido dextrógiro o levógiro en forma elipse o circunferencia con centro en el origen, donde los ejes mayor y menor de la elipse pueden estar rotados un ángulo agudo con respecto al plano coordenado original.
2. Se transformó los sistemas con saturación, planteados en [1, 28], en un sistema de Filippov, restringiéndolos al caso en que el sistema lineal que empuja contra la saturación presenta un centro en el origen. Además, se determinó y clasificó todos los puntos deslizantes especiales del sistema de Filippov calculado, con lo cual se logró observar que la dinámica del sistema de Filippov, desde la frontera de conmutación, Σ , hacia abajo, es independiente de la segunda componente del campo que define la dinámica en la región no admisible, S_2 , la cual debe ser suave en $\overline{S_2}$ y negativa en Σ .
3. Utilizando el Teorema 3 y los diferentes puntos deslizantes especiales calculados, se logró describir analíticamente todos los posibles retratos de fase que presenta el sistema de Filippov, con lo cual se determinó los parámetros de bifurcación, a y h , que presenta el sistema.
4. Se analizó las bifurcaciones que presenta el sistema de Filippov al variar los parámetros a y h de positivos a negativos, sin tener en cuenta el cambio cualitativo que pueda tener la dinámica definida en S_2 . Además, se logró realizar los diagramas de bifurcación de codimensión dos que presenta el sistema de Filippov.

6.2. Trabajo a futuro

Se propone como trabajo a futuro analizar los sistemas con saturación, planteados en [1, 28], desde el marco teórico de los sistemas de Filippov, en los casos en que el sistema lineal, que empuja contra la saturación, presente un foco, nodo o punto de silla en el origen. Para esto, se transforman los sistemas con saturación en un sistema de Filippov, se calculan los puntos deslizantes especiales y posteriormente se podría utilizar los resultados de [17] y [22] con el fin de clasificar las diferentes bifurcaciones que pueda presentar el sistema de Filippov calculado. En dichos documentos, se muestran los tipos de bifurcación que puede exhibir un sistema de Filippov dos-dimensional con una frontera de discontinuidad, la cual separa un sistema simple (sistema sin puntos de equilibrio ni puntos tangentes a la frontera de conmutación) de un sistema con un punto de equilibrio hiperbólico en el origen. Se espera que los sistemas de Filippov calculados tengan más de un parámetro de bifurcación tal que uno de ellos sea el parámetro h que define a la frontera de discontinuidad y los otros sean entradas de la matriz de coeficientes del sistema lineal que empuja contra la saturación. Entre las bifurcaciones que se pueden presentar se encuentran las *boundary focus bifurcation*, *boundary node bifurcation* y las *boundary saddle bifurcation*, las cuales están documentadas en [17] y [22].

Bibliografía

- [1] ANGULO, F ; OLIVAR, G. ; OSORIO, G.A. ; ESCOBAR, C.M. ; FERREIRA, J.D. ; REDONDO, J.M.: Bifurcations of non-smooth systems. *Commun Nonlinear Sci Number Simulat*, p. 4683 - 4689, 2012.
- [2] ARANGO, I ; TABORDA, J.A.: Analyzing sliding bifurcations on discontinuity boundary of Filippov systems. *America conference on applied mathematics*, Harvard, Massachusetts, Usa, March 24-25, 2008.
- [3] AUBIN, D. ; DAHAN, D.A. : Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures. *Historia Mathematica* 29, p. 273 - 339, 2002.
- [4] BIÁK, M. ; HANUS, T. ; JANOVSÁ, D.: Some applications of Filippov's dynamical systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2013.
- [5] BIAO, T. ; YANNI, X ; CHEKE, R. A. ; WANG, N.: Piecewise virus-immune dynamic model with HIV-1 RNA-guided therapy. *Journal of Theoretical Biology*, 2015.
- [6] BROGLIATO, B.: *Impacts in Mechanical Systems: Analysis and Modelling*. Lecture Notes in Physics, Vol 551, Springer Verlag, 2000.
- [7] BROGLIATO, B.: *Nonsmooth Mechanics: Models, Dynamics and control*. Springer Verlag, 1999.
- [8] COLOMBO, A. ; DI BERNARDO, M ; HOGAN, S.J. ; JEFFREY, M.R.: Bifurcations of piecewise smooth flows: perspectives, methodologies and open problems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 241, p. 1845-1860, 2012.
- [9] DE LARA, M. ; DOYEN, L.: *Sustainable Management of Natural Resources Mathematical Models and Methods*. Springer-Verlag, 2008.
- [10] DI BERNARDO, M ; BUDD, C.J. ; CHAMPENEYS, A.R.: Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: A unified analytical framework. *Phys. Rev. Lett* 86, p. 1881-1908, 2001.
- [11] DI BERNARDO, M. ; BUDD C. ; CHAMPNEYS, A. ; KOWALCZYK, P.: *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer-Verlag, 2008.

- [12] DI BERNARDO, M. ; PAGANO, D. ; PONCE, E.: Non-hyperbolic Boundary Equilibrium Bifurcations in Planar Filippov Systems: A Case Study Approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008.
- [13] DIECI, L. ; LOPEZ, L.: Sliding Motion in Filippov Differential Systems: Theoretical Results and a Computational Approach. *SIAM Journal on Numerical Analysis* Vol. 47, No. 3, 2009.
- [14] FILIPPOV. A.F.: Differential equation with discontinuous right-hand sides. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [15] GUARDIA, M. ; SEARA, T.M. ; TEIXEIRA, M.A.: Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems. *Journal of Differential Equations* 250, p. 1967–2023, 2010.
- [16] HIRSCH, M. ; SMALE, S. ; DEVANEY, R.: Differential Equations, Dynamical systems, and An Introduction to Chaos. Elsevier Academic Press, 2004.
- [17] HOGAN, S.J. ; HOMER, M.E. ; JEFFREY, M.R. ; SZALAI, R.: Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations. *Nonlinear Science* 26, p. 1161–1173, 2016.
- [18] ÍGOREVICH, V.: Ordinary differential equation. Springer Verlag, third edition, 1992.
- [19] KONG, T. Chi: Complex Behavior of Switching Power Converters. CRC Press, 2003.
- [20] KUNZE, M.: Non-Smooth Dynamical System. Springer Verlag, 2000.
- [21] KUZNETSOV, Y.A.: Elements of applied bifurcation theory, second edition, Springer Verlag, 1998.
- [22] KUZNETSOV, Y.A. ; RINALDI, A. ; GRAGNANI, A.: One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcations and Chaos* 13, p. 2157–2188, 2003.
- [23] LEINE, R.I.: Bifurcations in discontinuous mechanical systems of the Filippov-type. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2000.
- [24] LEINE, R.I. ; NIJMEIJER, H.: Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics* Vol.18, Springer-Verlag, 2004.
- [25] LEHMANN, CHARLES H.: Analytic Geometry. John Wiley & Sons, 1942.

-
- [26] LLIBRE, J. ; ORDÓÑEZ, M. ; PONCE, E.: On the existence and uniqueness of limit cycles in planar continuous piecewise linear systems without symmetry. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013.
 - [27] LLIBRE, J. ; TERUEL, A.: Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems. Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Differential Systems. *Birkhauser Advanced Texts*, 2014.
 - [28] OSORIO, G.A. ; ANGULO, F. ; OLIVAR, G.: IUTAM Symposium on Dynamics Modeling and Interaction Control in Virtual and Real Environments, p. 119-126, 2010.
 - [29] PERKO, L.: Differential equation and dynamical systems. Springer Verlag, third edition, 2001.
 - [30] STROGATZ, S.: Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. PERSEUS BOOKS, 1994.
 - [31] TEMPLE, E.: Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré, Scottish-born American, 1937.
 - [32] WANG, A. ; XIAO, Y. ; ZHU, H.: Dynamics of a Filippov Epidemic Model With Limited Hospital Beds. *Mathematical Biosciences and Engineering* 15, p. 739-764, 2018.